

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FLAVIO PREBIANCA

DESCREVENDO RUÍDO NO CIRCUITO DE CHUA

CURITIBA

2019

FLAVIO PREBIANCA

DESCREVENDO RUÍDO NO CIRCUITO DE CHUA

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Física, no Programa de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Física*.

Orientador: Marcus Werner Beims.

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

---

P922d Prebianca, Flavio  
Descrevendo ruído no circuito de Chua [recurso eletrônico]  
Flavio Prebianca – Curitiba, 2019.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências  
Exatas, Programa de Pós-graduação em Física.  
Orientador: Marcus Werner Beims

1. Circuito de Chua (oscilador eletrônico não linear). 2.  
Lyapunov - Diagrama de. 3. Computador analógico. I.  
Universidade Federal do Paraná. II Beims, Marcus Werner. III.  
Título.

CDD: 530.15352

---

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **FLAVIO PREBIANCA** intitulada: "**Descrevendo ruído no Circuito de Chua**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 27 de Fevereiro de 2019.

MARCUS WERNER BEIMS

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

RICARDO LUIZ VIANA

Avaliador Interno (UFPR)

IBERÊ LUIZ CALDAS

Avaliador Externo (USP)

EMILSON RIBEIRO VIANA JUNIOR

Avaliador Externo (UTFPR)



*A minha filha Luiza Constância  
e minha esposa Kleity.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e pelo universo não linear;

Agradeço aos meus pais Francisco e Silvina, por todo auxílio, apoio e exemplo de luta;

Agradeço a minha esposa Kleity e minha filha Luiza, pela compreensão e apoio;

Agradeço a UFPR, por ter me acolhido como aluno;

Agradeço ao orientador Prof. Dr. Marcus Werner Beims, , pelas discussões, paciência e exemplo de profissionalismo;

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física da UFPR, pelo conhecimento compartilhado;

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos A. M. de Carvalho, pelo suporte computacional através do LFTC;

Agradeço ao Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque e o Ms. David W. C. Marcondes, pelo suporte e realização conjunta da parte experimental;

Agradeço aos amigos do Programa de Pós-Graduação em Física da UFPR, Adriane, Amanda, Anderson, Carlos F., Eduardo B., Flávio R., Karla, Karlinsson, entre outros, pelas diversas conversas e discussões;

Agradeço ao Cnpq, pelo auxílio financeiro.

## RESUMO

O tema principal desenvolvido nesta tese de doutorado está relacionado com o estudo da dinâmica do circuito de Chua. O circuito de Chua é um oscilador eletrônico não linear apresentando as dinâmicas caóticas ou periódicas, respectivas aos valores de parâmetros de controle. É intrínseco de sistemas eletrônicos reais uma pequena perturbação aleatória denominada de ruído, devido aos próprios componentes utilizados como capacitor, resistor, amplificadores operacionais, etc. Neste trabalho estudamos como o ruído descrito por uma distribuição gaussiana influencia o plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov no circuito de Chua, através de modelagem numérica e compara ao obtido via circuito experimental. Vimos que as regiões periódicas experimentais são suprimidas quanto maiores as intensidades de ruído e mostramos os mesmos efeitos por integrações numéricas. Mostramos esses efeitos para dois modelos numéricos para o circuito de Chua. O primeiro modelo numérico aborda a proposta para o circuito de Chua com indutor eletrônico, fazendo uma relação direta entre os parâmetros de controle  $R$  e  $r_L$ , que são resistores variáveis. O segundo modelo usamos o sistema adimensional de Chua para o qual mostramos resultados experimentais, através de computação analógica, onde os parâmetros de controle são tensões elétricas controladas por uma placa de aquisição de dados acoplada em um computador. Concluimos que nosso modelo numérico descreve adequadamente o efeito do ruído em sistemas realísticos usando o ruído gaussiano.

**Palavras-chave:** Circuito de Chua, ruído gaussiano, computador analógico, diagrama de Lyapunov.

## ABSTRACT

The main theme developed in this doctoral thesis is related to the study of the dynamics of the Chua's circuit. Chua's circuit is a nonlinear electronic oscillator which presents chaotic or periodic dynamics, depending on the control parameter values. It is intrinsic to real electronic systems a small random disturbance called noise, due to fluctuations of the components used like as capacitor, resistor, operational amplifiers. In this work, we study how the noise described by a Gaussian distribution influences in the plane of parameters for the largest Lyapunov exponent in the Chua's circuit. This is done using a numerical model and compared to results obtained from an experimental circuit. Experimental periodic regions are suppressed at larger noise intensities, a result which is also observed from the numerical integration. We show this effect for two numerical models of the circuit. The first numerical model addresses the proposal for the circuit with an electronic inductor, making a direct relation between the control parameters  $R$  and  $r_L$ , which are variable resistors. The second is based on the dimensionless circuit, and experimental results are obtained constructing an analog circuit, where the control parameters are electrical voltages controlled by a data acquisition board coupled with a computer. We conclude that our numerical model adequately describes the behavior of electronic circuits under realistic Gaussian noise.

**Keywords:** Chua's circuit, gaussian noise, analog computer, Lyapunov diagram.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica. . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	Estabilidade, instabilidade e o expoente de Lyapunov . . . . .	18
2.2	Diagrama de bifurcação. . . . .	23
2.3	Integração numérica . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Osciladores . . . . .</b>	<b>29</b>
3.1	Osciladores lineares. . . . .	29
3.2	Osciladores não lineares . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Chua canônico . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1	Sistema de equações adimensionalizadas. . . . .	42
4.2	Resultados numéricos. . . . .	44
<b>5</b>	<b>Chua análogo. . . . .</b>	<b>49</b>
5.1	Sistema de equações adimensionalizadas. . . . .	49
5.2	Materiais e métodos. . . . .	50
5.3	Resultados experimentais . . . . .	53
5.4	Resultados numéricos. . . . .	58
<b>6</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>66</b>
	<b>Apêndice A: Artigo Científico. . . . .</b>	<b>73</b>

## 1 Introdução

A possibilidade de prever o futuro, mesmo que remota, sempre instiga a mente humana. Quando observamos comportamentos que obedecem a algum padrão da natureza, tentamos descrevê-los através de alguma regra, utilizando como linguagem a Matemática, ou seja, existem situações onde escrevemos equações prevendo um estado futuro, desde que tenhamos uma quantidade mínima de informação do sistema. Se as mudanças são regidas por regras específicas dizemos que o sistema é determinista. Se as mudanças são regidas por regras aleatórias o sistema é estocástico. Os movimentos erráticos ou de caráter irregular, denominados como aleatórios ou imprevisíveis, ocorrem de forma espontânea e fazem parte essencial dos movimentos macroscópicos e microscópicos. Quando superpostos aos movimentos previsíveis, constituem as flutuações aleatórias às vezes chamadas de ruído.

O movimento browniano descreve o movimento aleatório de uma partícula sob ação das colisões de outras inúmeras partículas que pertencem ao ambiente (ou reservatório). Se possível, de posse das equações de movimento de todas as partículas, sistema mais ambiente, descreveríamos toda a trajetória, que não seria aleatória e sim determinística. Como em geral não temos o conhecimento de todas as equações de movimento, modelos probabilísticos são utilizados para descrever a dinâmica estocástica. Sendo assim, do ponto de vista da Mecânica Clássica, ruído pode ser entendido por falta de informação do modelo matemático para descrever o sistema.

Ruído, no sentido mais amplo, pode ser definido como qualquer perturbação indesejada que obscurece ou interfere no sinal adquirido [1]. Há casos onde o ruído é considerado por um efeito destrutivo. Também, o mesmo, obscurece a visualização de um sistema, mas é inofensivo sobre os processos implícitos envolvidos [2]. As flutuações aleatórias que são onipresentes no mundo afetam inevitavelmente todos os sistemas físicos, originados das flutuações do ambiente e das flutuações internas ao próprio sistema, podendo ser minimizado para qualquer configuração de um sistema, mas nunca sendo totalmente eliminado [2].

Nesta tese, usamos a palavra ruído para representar flutuações espontâneas resultantes da física dos dispositivos e materiais que compõem o sistema elétrico. Assim, por exemplo, o ruído térmico existente em todos os condutores elétricos a temperaturas acima do zero absoluto é um ruído fundamental, que não pode ser exatamente previsto, nem pode ser totalmente eliminado, mas pode ser manipulado e seu efeito minimizado [1].



O estudo de sistema dinâmicos em circuitos eletrônicos tem área de interesse em criptografia caótica, transmissão de informação, controle de caos, medicina, etc. Criptografia caótica consiste em utilizar um circuito com dinâmica caótica para mascarar uma informação, o receptor da informação somente descriptografará a informação conhecendo o sistema caótico e os parâmetros utilizados [3, 4]. O estudo em transmissão de informação preocupa-se com o comportamento não linear dos componentes eletrônicos, como as portas lógicas e sincronismo de transmissão de sinal [5]. O controle de caos baseia-se na riqueza de padrões periódicos imersos em regiões caóticas e pode ser entendido como a utilização de pequenas perturbações no sistema para estabilizar uma trajetória para dentro desses comportamentos periódicos [6]. Em medicina, citamos dois circuitos eletrônicos. O primeiro é o estimulador cerebral profundo utilizado no tratamento de doenças como mal de Parkinson e epilepsia [7]. O equipamento consiste de um circuito eletrônico com dois eletrodos implantados a uma região específica do cérebro. O circuito eletrônico emite pulsos de baixa tensão para estimular a transmissão de informação no cérebro, reduzindo a quantidade de medicamentos para o tratamento da doença [8]. O segundo circuito a ser citado é o marca-passo cardíaco, sendo um dispositivo implantado no paciente que controla a arritmia cardíaca utilizando técnicas de controle de caos [9, 10].

O ruído pode promover um resultado duplo em sistemas lineares. O primeiro a citar é o comportamento benéfico (e desejável), por exemplo o fenômeno de ressonância estocástica onde um sinal adicionado a uma baixa amplitude de ruído aumenta o sinal transmitido [11, 12, 13, 14]. Por outro lado, e mais comum, o ruído induz um efeito indesejado perturbando as previsões teóricas e numéricas de um fenômeno físico. Em sistemas não lineares, efeito de ruído pode destruir os movimentos regulares transformando-os em movimentos irregulares [15, 16, 17], diminuindo a área da estrutura periódica no espaço de parâmetros [18].

O ruído é um sinal, como exemplo senoidal ( $V_{Ruido} = A \sin(2\pi f + \theta)$ ), contendo frequência  $f$ , amplitude  $A$  e fase  $\theta$ , todos aleatórios. Embora há a possibilidade de medir exatamente o valor médio da amplitude do ruído a longo prazo, para qualquer instante do tempo não pode ser prevista, caso contrário, a amplitude instantânea não seria um problema [1]. Podemos modelar matematicamente o movimento aleatório quando conhecemos a distribuição a que pertence. Para as amplitudes instantâneas, a distribuição gaussiana abrange adequadamente o ruído de circuitos elétricos, originados principalmente por efeitos relacionados a temperatura [1, 19, 20]. Na Fig. 1.1(a) é mostrada uma série temporal adquirida de um circuito eletrônico e o respectivo

histograma da posição no tempo, mostrado na Fig. 1.1(b), lembrando uma distribuição gaussiana.

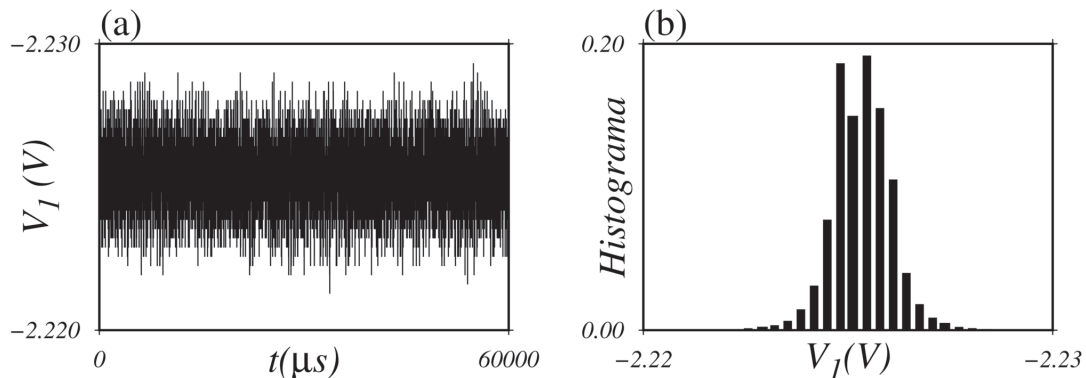


Figura 1.1: (a) Série temporal de um ponto fixo do circuito eletrônico, apresentando um comportamento aleatório. (b) Histograma da série temporal, lembrando uma distribuição gaussiana.

Antes de considerarmos o efeito do ruído nos sistemas, precisamos primeiro encontrar formas de quantificar essas propriedades. Ao fazê-lo, devemos ter em mente que as quantidades com as quais estamos preocupados possuem características aleatórias. Ocorrem que os ruídos podem e são convenientemente descritos em termos de três características: suas intensidades, distribuições e correlações. A intensidade dá uma medida da “força” de um determinado ruído, e portanto, a quantidade que a variável do sistema pode ser deslocada. A distribuição nos informa a probabilidade de que o ruído tenha um determinado valor em qualquer momento. A correlação, geralmente definida como a função de autocorrelação do ruído, fornece uma medida da “memória” das flutuações: se o ruído tem um valor particular em um momento, sua correlação de tempo nos diz a extensão (se houver) para a qual imaginamos que terá o mesmo valor em algum tempo futuro. Exemplificamos alguns tipos de ruído como: o dicotômico, também conhecido por ter um sinal telegráfico aleatório. Existem dois níveis permitidos para os valores da variável aleatória, por exemplo 0 e 1, ligado-desligado, 0V e 5V, o ruído dicotômico consiste de alternância aleatória entre os dois valores possíveis.

Outro exemplo ocorre em válvulas de rádio e é conhecido como “ruído de disparo”. Esse consiste de uma série de picos extremamente acentuados de força variável. Por fim, um exemplo comum de flutuação na Física, e o utilizado nesta tese para descrever flutuações aleatórias no circuito eletrônico de Chua, o ruído gaussiano, como mostrado na Fig. 1.1. A variável aleatória, representando o ruído, é distribuída de acordo com a distribuição gaussiana. A distribuição

sempre terá largura e média definidas, sendo a largura relacionada com o intensidade do ruído e é convencional normalizar o sistema para que a média seja zero.

O circuito eletrônico de Chua, construído nos anos 80 do século passado, é um circuito eletrônico caótico reprodutível com evidência experimental do caos. Entenda-se por caos, por enquanto, as características da sensibilidade às condições iniciais e movimento aperiódico [21]. Esse sistema é amplamente estudado como modelo de caos experimental, devido à sua rica dinâmica e também é um exemplo de oscilador não linear.

O estudo de dinâmica em osciladores não lineares e suas aplicações em Física e Engenharia desempenharam um papel vital no desenvolvimento de tecnologias como rádio, radar, circuito fechado de fase e lasers [21]. Exemplos desses osciladores não lineares, além do circuito de Chua, citamos os osciladores de Van der Pol e o Duffing. O primeiro fornece um exemplo de um oscilador não linear com amortecimento, sendo a energia dissipada quando atinge grande amplitude e amplificada quando está em baixa amplitude. O segundo exemplo refere-se ao oscilador não linear com termo cúbico para descrever o efeito de endurecimento da rigidez da mola [22]. Tais sistemas tipicamente possuem ciclos limite, que são oscilações com frequência bem definida, sustentadas em torno de um estado em que a geração de energia e a dissipação se equilibram. Essas oscilações auto sustentadas surgem em muitos problemas físicos, como exemplo: oscilações induzidas de edifícios, problemas de flutuações aeroelásticos, em modelos de reações químicas [22]. A aplicação original descrita por Van der Pol modela um circuito elétrico com uma válvula triodo, cujas propriedades resistivas mudam com a corrente, apresentando resistência negativa à baixa corrente elétrica e tornando-se positiva conforme a corrente elétrica aumenta [22].

Em 1963, Lorenz estudou um modelo simplificado de convecção na atmosfera para obter informações sobre a hoje conhecida notória imprevisibilidade do clima, descobrindo que as soluções para suas equações nunca se estabelecem em equilíbrio ou a um estado periódico, em vez disso, a dinâmica oscila de forma irregular e aperiódica. Além disso, ele começou suas simulações de duas condições iniciais “ligeiramente” diferentes, resultando em comportamentos totalmente diferentes. A explicação inicial foi de erros despropositados minúsculos na medição do estado atual da atmosfera, sendo ampliado rapidamente, levando eventualmente a previsões alteradas. Mas Lorenz também mostrou que havia estrutura no movimento irregular quando plotados em três dimensões, as soluções para suas equações convergiram em um conjunto de pontos em forma de “borboleta” [21]. O circuito de Chua, permitiu a refutação da suspeita de que

o fenômeno observado por Lorenz [23] era apenas uma abstração de erros numéricos [24]. Desde a construção do circuito de Chua, muitos trabalhos e livros foram publicados com resultados e sistemas inspirados no mesmo [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Possivelmente por ser um sistema simples e robusto, do ponto de vista de construção, com componentes eletrônicos de baixo custo, é possível observar com parâmetros de controles distintos as dinâmicas periódicas e caóticas mesmo com a presença de ruído.

No modelo canônico [24] do circuito de Chua o comportamento do diodo é descrito por uma função linear por partes e os resultados numéricos mostram, em um plano de parâmetros, características de *spiral hubs* [35, 36, 37] formadas por conectar estruturas periódicas chamadas de *shrimps* [38]. A Fig. 1.2 mostra um exemplo de estrutura periódica e a Fig. 1.3 mostra um exemplo de *spiral hubs*.

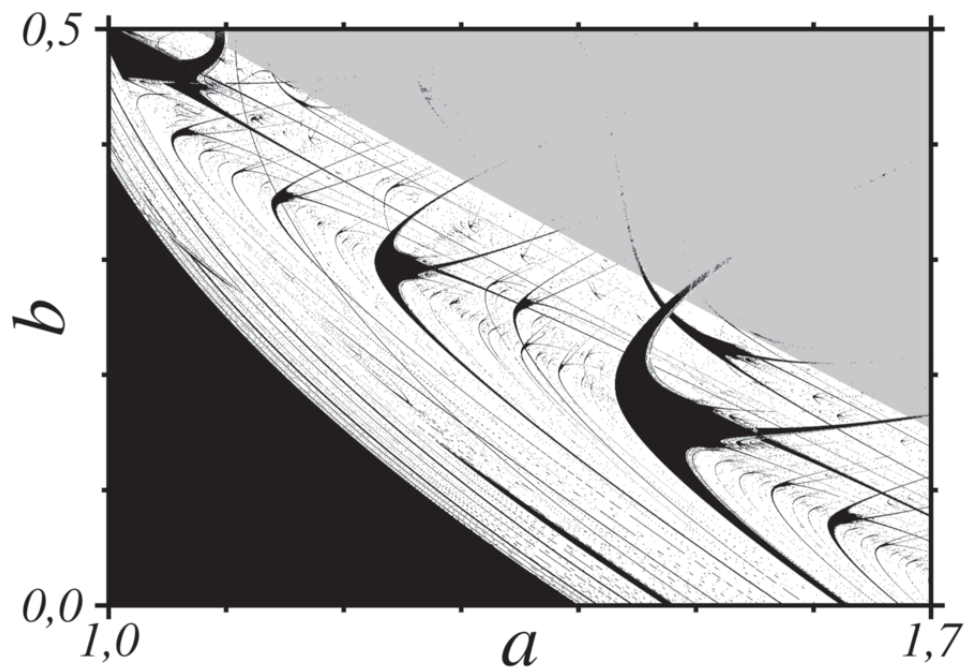


Figura 1.2: As estruturas periódicas em preto (*shrimps*), imersas nas regiões caóticas (em branco).

Fonte: *Structure of the Parameter Space of the Henon Map* [38].

Publicações recentes num viés experimental, mostram a dinâmica do circuito com comportamento para o diodo sendo descrito por uma função linear em cinco partes [33, 32] e indutor eletrônico [25]. Neste caso os autores reportam medidas experimentais do espaço de parâmetros, como resultado, a *spiral hub* presente no modelo função linear em três partes [29, 36] é destruído e as estruturas periódicas embarcadas no domínio de caos são distorcidas, iniciando

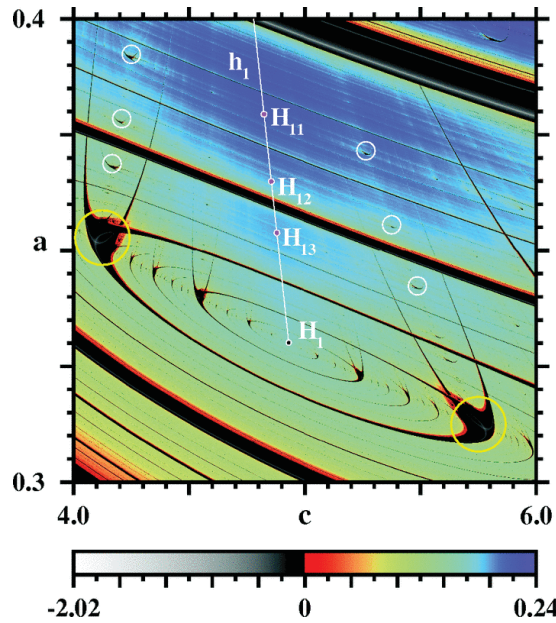


Figura 1.3: As estruturas periódicas em preto (*shrims*), imersas nas regiões caóticas (região colorida). As estruturas periódicas se conectam formando *spiral hubs*.

Fonte: *Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows* [37].

pelas antenas até o corpo central da estrutura. Os autores atribuíram isso ao efeito de distorção térmica, elétrica e analógica na conversão digital do ruído, e por distorcer a curva linear por partes do diodo real do modelo. De fato, este fenômeno é similar ao que foi reportado com os experimentos numéricos em sistemas discretos [18, 39, 40] e sistemas a tempo contínuo [18] com ruído, onde a intensidade de ruído perturba o plano de parâmetros corroendo todas as estruturas periódicas, iniciando pelas extremidades. Para sinais de altas intensidades, há somente comportamento caótico no plano de parâmetros.

Sistemas dinâmicos não lineares são modelados pelo conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas que determinam estados passado e futuro por conhecimento do estado presente do sistema. Esta técnica de modelagem numérica em tempo real atrai muita atenção desde os trabalhos de Lorenz [23] e Chua [41]. Numerosos comportamentos dinâmicos são descritos por sistemas analíticos, numéricos e por técnicas experimentais [24, 26, 42, 43]. Resultados significantes sobre os modelos são reportados, mas essencialmente por métodos numéricos com o avanço dos computadores modernos e algoritmos [44, 45, 46, 47, 48, 49].

Especificamente na última década, publicou-se resultados mostrando as estruturas complexas nos planos dos parâmetros de muitos modelos [29, 36, 48, 49, 50], através de resultados numéricos. Como por exemplo a presença de estruturas periódicas embarcadas no domínio caótico presente em várias regras de auto-organização e bifurcação. Portanto, esses

corroboram com resultados analíticos e numéricos. Por outro lado, há uma pequena quantidade de trabalhos experimentais reportando resultados dessas estruturas complexas no plano de parâmetros de sistemas dinâmicos [33, 34, 51, 52, 53], devido à dificuldade experimental em variar simultaneamente dois parâmetros de controle do sistema e devido às distorções intrínsecas do ruído quando comparado ao resultado teórico previsto.

Esta tese descreve a influência do ruído em sistemas dinâmicos, sendo nosso objeto de estudo o circuito de Chua. A ideia é explorar o efeito do ruído conhecendo sua intensidade via modelo numérico para a versão do Circuito de Chua com indutor eletrônico. Também exploramos o plano de parâmetros de estudo experimental do circuito de Chua usando computação analógica. A vantagem em usar tal técnica (computação analógica) é a facilidade para construir um experimento numa abrangência de sistemas dinâmicos, através das equações de movimento, em um simples mas robusto esquema eletrônico, construído com circuitos integradores eletrônicos e aplicando a Lei de Kirchhoff nele. Portanto, a dinâmica do circuito reproduzido tem o mesmo comportamento esperado do sistema original. Outros computadores analógicos do Circuito de Chua foram reportados antes [30], onde os autores propõem variar a tensão no circuito analógico alterando o controle de parâmetros do modelo com indutor ideal. Seguindo esta ideia, de variar a tensão de controle dos parâmetros no computador analógico, a tese contempla o plano de parâmetros de um Circuito de Chua análogo para o maior expoente de Lyapunov (MEL) obtido pelas medidas da série temporal do experimento instalado. Portanto, no nosso caso, modificações adequadas são realizadas no circuito Chua análogo para melhorar a automação nas medições com intensidades de baixo ruído e estender o modelo adicionando um resistor no indutor.

Esta tese é organizada em seis capítulos, sendo este primeiro o tópico de introdução e motivação. O capítulo segundo, ao título de fundamentos teóricos aborda os conceitos de sistemas dinâmicos, como estabilidade, instabilidade, atrator, expoente de Lyapunov entre outros que se fazem necessários ao entendimento desta tese. O capítulo terceiro discute aspectos teóricos de osciladores, aplicando conceitos do capítulo de fundamentos teóricos em osciladores lineares seguido dos osciladores não-lineares Van der Pol e circuito de Chua, citados anteriormente, mas agora enfatizando a dinâmica característica de cada um, com intuito de ser didático ao entendimento do funcionamento do circuito de Chua. No quarto capítulo, mostrar-se-ão os resultados via integração numérica apresentados na forma de plano de parâmetros, para o maior expoente de Lyapunov e isopicos, para o modelo de sistema de equação para circuito de Chua, chamado de Chua canônico.



No quinto capítulo, explicitar-se-ão o método experimental e modelo do circuito de Chua confeccionado, chamado de Chua análogo, quanto aos equipamentos utilizados, técnicas de medidas, tratamento dos dados. Explanamos os resultados experimentais via plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov, estudo qualitativo via diagrama de bifurcação e atratores. Também mostramos os resultados numéricos por plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov.

Por fim, o sexto capítulo disserta sobre as considerações finais, comparando os resultados experimentais e numéricos, concluindo que o modelo numérico de integração estocástica utilizado na tese corresponde ao sistema real.

## 2 Fundamentação Teórica

O futuro e o passado de muitos estados físicos, químicos, biológicos, ecológicos, econômicos e até mesmo os sistemas sociais são previsíveis até certo ponto desde que conheçamos o estado atual e as leis que governam sua evolução [54]. Desde que essas leis não se alteram no tempo, o comportamento de tal sistema pode ser considerado como completamente definido pelo seu estado inicial [54]. Assim, a noção de um sistema dinâmico inclui um conjunto de estados possíveis (espaço de estados) e uma lei da evolução do estado no tempo [54].

Aqui, o tempo pode ser uma variável contínua ou discreta de valores inteiros. Sistemas discretos são mapas que descrevem a evolução temporal de um sistema, expressando seu estado atual como função do seu estado anterior [55]. A iteração do mapa corresponde ao movimento do sistema através do tempo em atualizações discretas, escritas na forma vetorial como  $\vec{x}_{j+1} = \vec{f}(\vec{x}_j)$ , onde  $j = 1, 2, 3, \dots$  é o tempo discreto,  $\vec{x}_j$  é o vetor de estado no tempo  $j$  e  $\vec{x}_{j+1}$  é o vetor de estado no tempo  $j + 1$  e  $\vec{f}$  é o mapa. Para sistemas contínuos, em vez de expressar o estado atual como função do estado anterior, uma equação diferencial expressa a taxa de mudança do estado atual em função do estado anterior [55]. Um exemplo de sistema dinâmico de  $N$  equações diferenciais ordinárias (EDO), autônomas<sup>1</sup> de primeira ordem, onde o tempo (denotado por  $t$ ) é uma variável contínua, é

$$\begin{cases} \frac{dx^{(1)}}{dt} = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} = F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ \vdots \\ \frac{dx^{(N)}}{dt} = F_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \end{cases}$$

escrita vetorialmente por  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)]$ , onde  $\vec{x}$  é um vetor  $N$ -dimensional [56]. Este é um sistema dinâmico, pois a qualquer estado inicial  $\vec{x}(0)$  do sistema, podemos em princípio, resolver as equações para obter o sistema futuro  $\vec{x}(t)$  para  $t > 0$ . A Fig. 2.1 mostra o caminho seguido pelo sistema à medida que evolui com o tempo, em um caso onde  $N = 3$  [56]. O espaço  $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$  na figura é conhecido como espaço de fase, e o caminho no espaço de fase seguido pelo sistema conforme evolui com o tempo é referido como um órbita ou trajetória [56].

---

<sup>1</sup>Quando não há dependência explícita do tempo.

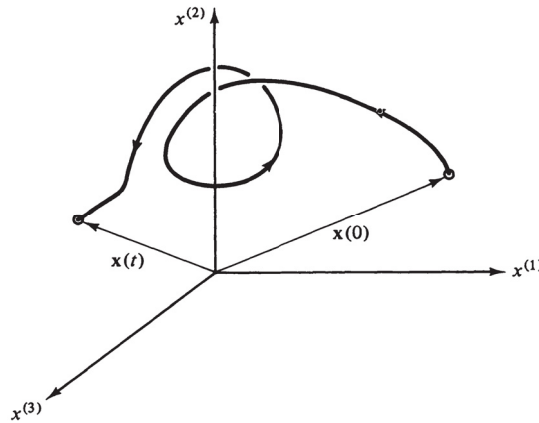


Figura 2.1: Uma trajetória no espaço de fase para um sistema de três equações diferenciais.  $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$  são espaços de estados,  $\vec{x}(0)$  o sistema inicial e  $\vec{x}(t)$  o sistema evoluído a tempo  $t$ .

Fonte: *Chaos in dynamical systems* [56].

Todos os estados possíveis do sistema são caracterizados pelos pontos de algum conjunto  $x^{(N)}$ . Muitas vezes, o espaço de estado é chamado de espaço de fase, seguindo uma tradição da mecânica clássica [54].

Outra importante definição é o atrator, sendo para o fluxo um conjunto invariante que “atrai” todas as soluções próximas. Matematicamente, definimos por: seja  $\frac{dX}{dt} = F[X(t)]$  um sistema de equações diferenciais em  $R^N$  com fluxo  $\phi_t$ . Um conjunto  $\Lambda$  é chamado de atrator se [57]:

1.  $\Lambda$  é mínimo e invariante;
2. Existe um conjunto aberto  $U$  contendo  $\Lambda$  tal que para cada  $X$  que pertence a  $U$ , o fluxo  $\phi_t(X)$  pertence a  $U$  e fica contido em  $U$  para todo o tempo assintótico;
3. (Transitividade) Dados quaisquer pontos  $Y_1, Y_2$  que pertence a  $\Lambda$  e qualquer vizinhança aberta  $U_j$  sobre  $Y_j$  em  $U$ , existe uma curva de solução que começa em  $U_1$  e depois passa por  $U_2$ .

A condição de transitividade é para garantir que estamos olhando para um único atrator em vez de uma coleção de atratores dinamicamente diferentes [57]. Os atratores característicos para um sistema dinâmico com três equações diferenciais pertencem resumidamente a quatro casos: ponto fixo, ciclo limite (período ou estabilidade), quasiperiódico e caótico.

Os pontos fixos representam soluções de equilíbrio, sendo estáveis ou instáveis. Também chamados de soluções, constantes, zero ou de repouso, pois se  $x = x_*$ , então  $x(t) = x_*$ , para

todo o tempo. Um ponto de equilíbrio é definido como estável se todos os deslocamentos suficientemente pequenos, próximos às vizinhanças, diminuïrem no tempo. Por outro lado, um ponto de equilíbrio é definido como instável quando esse deslocamento aumenta no tempo [21]. Na Fig. 2.2(a) ilustramos uma trajetória que converge a um atrator de ponto fixo.

Outra solução de equilíbrio é o ciclo-limite estável, pois este modela sistemas que exibem oscilações autossustentadas. Em outras palavras, esses sistemas oscilam mesmo com ausência de forçamento periódico externo. Mencionamos alguns exemplos: o bater de um coração; o disparo periódico de um ritmo neurônio criador; ritmos diários da temperatura corporal e secreção hormonal; reações químicas que oscilam espontaneamente; vibrações auto-excitadas perigosas em pontes e asas de avião. Em cada caso, há um comportamento oscilatório com período, forma de onda e amplitude preferidos. Se o sistema é perturbado ligeiramente, sempre retorna ao ciclo padrão [21]. Na Fig. 2.2(b) mostramos um atrator ciclo limite.

As características de um atrator quasiperiódico é a razão entre duas frequências naturais de um sistema, sendo um número irracional. Uma trajetória com duas ou mais frequências naturais incomensuráveis configura uma dinâmica que nunca se fecha sobre si, definindo uma oscilação na forma toroidal [55]. A Fig. 2.2(c) ilustra um torus, respectivo ao comportamento quasiperiódico.

Por fim, a característica de um atrator caótico é sua aperiodicidade e dependência sensível às condições iniciais, que consequentemente as trajetórias iniciadas em regiões vizinhas próximas afastam-se à medida que o sistema evolui no tempo [55]. A Fig. 2.2(d) mostra um caso de atrator caótico.

## 2.1 Estabilidade, instabilidade e o expoente de Lyapunov

Para caracterizar a estabilidade de um ponto do sistema, utilizamos a seguinte abordagem matemática: considere um sistema de equações diferenciais reais de primeira ordem  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x})$ . Se  $\vec{x} = \vec{x}_*$  com  $\vec{F}(\vec{x}_*) = 0$ , isto implica que  $\vec{x}_*$  é um estado de equilíbrio. Desejamos examinar o comportamento das órbitas próximas de  $\vec{x}_*$ . Assim definimos,

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_* + \vec{\eta}(t), \quad (2.1)$$

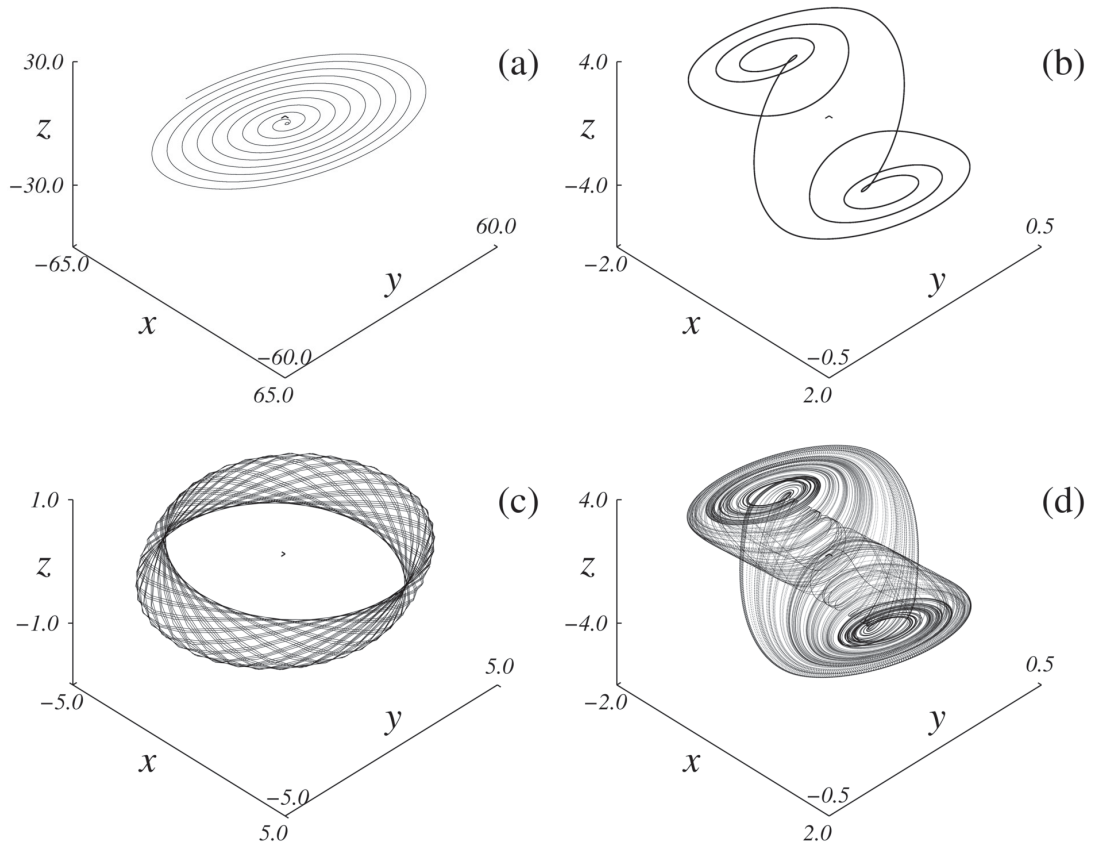


Figura 2.2: Exemplo de atratores (a) Uma trajetória que converge a um ponto fixo. (b) Exemplo de um atrator ciclo limite. (c) Exemplo de atrator quaseperiódico. (d) Exemplo de atrator caótico.

onde assumimos que  $\vec{\eta}(t)$  é uma perturbação pequena. Substituindo a Eq. 2.1 em  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x})$  e expandindo, temos a  $\vec{F}(\vec{x})$  para a primeira ordem  $\vec{\eta}(t)$  [56],

$$\vec{F}(\vec{x}_* + \vec{\eta}) = \vec{F}(\vec{x}_*) + \mathbf{J}(\vec{x}_*) \cdot \vec{\eta} + O(\vec{\eta}^2), \quad (2.2)$$

e  $\mathbf{J}$  denota as derivadas parciais, sendo a matriz jacobiana de  $\vec{F}$ . Isto é, se escrevermos,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(N)} \end{bmatrix}, \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} F^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)},) \\ F^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)},) \\ \vdots \\ F^{(N)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)},) \end{bmatrix}$$

então,

$$\mathbf{J}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial F^{(1)}/\partial x^{(1)} & \partial F^{(1)}/\partial x^{(2)} & \dots & \partial F^{(1)}/\partial x^{(N)} \\ \partial F^{(2)}/\partial x^{(1)} & \partial F^{(2)}/\partial x^{(2)} & \dots & \partial F^{(2)}/\partial x^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F^{(N)}/\partial x^{(1)} & \partial F^{(N)}/\partial x^{(2)} & \dots & \partial F^{(N)}/\partial x^{(N)} \end{bmatrix}$$

Obtemos a seguinte equação para a dependência temporal da perturbação de  $\vec{x}$  do estado de equilíbrio:

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \mathbf{J}(\vec{x}_*) \cdot \vec{\eta} + O(\vec{\eta}^2), \quad (2.3)$$

e o problema de estabilidade linear é obtido negligenciando termos de ordem  $\vec{\eta}^2$ . A equação acima escrita na forma geral fica [56]

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \vec{y}, \quad (2.4)$$

onde  $\vec{y}$  é um vetor real de dimensão  $N$  e  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $N \times N$  real independente do tempo. A Eq. 2.4 descreve a evolução do espaço tangente no tempo. Se buscarmos soluções da Eq. 2.4, as mesmas serão da forma,

$$\vec{y}(t) = \vec{v}e^{\lambda t}, \quad (2.5)$$

então a Eq. 2.4 se torna uma equação de autovalores,

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}, \quad (2.6)$$

que tem soluções não triviais para valores de  $\lambda$  que satisfazem a equação polinomial da ordem  $N$ -ésima [56],

$$D(\lambda) = \det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{I}$  denota a  $N \times N$  matriz identidade. Para nossos propósitos basta considerar apenas o caso onde  $D(\lambda) = 0$  tem  $N$  raízes distintas  $\lambda = \lambda_k$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ , (então  $\lambda_k$  diferente  $\lambda_j$  se  $k$  diferente  $j$ ).

Para sistemas de três equações diferenciais, haverá três autovalores que determinam a direção estável, central e instável do fluxo correspondendo respectivamente aos autovalores negativo, nulo e positivo. O comportamento local da dinâmica varia entre essas direções no espaço de estado. Os expoentes de Lyapunov (ELs) indicam a divergência exponencial entre



condições iniciais infinitamente próximas. As condições iniciais próximas podem estar se afastando ao longo de uma direção, e movendo-se juntas para outras. Para um dado ponto, imaginamos uma esfera de condições iniciais de raio infinitesimal evoluindo para uma elipsóide à medida que o sistema evolui [21], representado graficamente na Fig. 2.3. Assumindo que ao longo das três dimensões ( $k = 1, 2, 3$ ), o raio inicial  $r_k(t_0) \in \mathbb{R}^3$  variando exponencialmente no tempo, de maneira que a relação entre  $r_k(t_0)$  e o valor correspondente no instante  $t$ , dado por  $r_k(t)$ ,

$$r_k(t) = r_k(t_0)e^{\lambda_k(t-t_0)}. \quad (2.8)$$

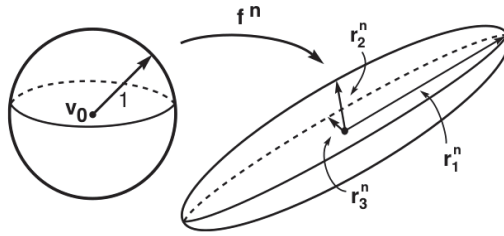


Figura 2.3: Representação gráfica de uma esfera de volume infinitesimal, ao evoluir no sistema  $f^n$ , deforma-se a um elipsóide. O semi-eixo maior indica a direção de instabilidade, o semi-eixo menor a direção de estabilidade.

Fonte: *Chaos in dynamical systems* [56].

Aplicando o logaritmo neperiano, obtemos uma relação para os  $\lambda_k$ , que são os EL. Essa relação pode ser reescrita como:

$$\lambda_k = \frac{\ln[r_k(t)/r_k(t_0)]}{t - t_0}. \quad (2.9)$$

A obtenção dos valores dos ELs são obtidos calculando o logaritmo neperiano do produto dos auto valores da matriz jacobiano  $\mathbf{J}$  em cada ponto  $\vec{x}(t)$ , com orientação inicial  $\vec{u}_0$ , evoluído ao tempo  $t$ , normalizados pelo tempo. Para o cálculo computacional o tempo é discretizado em  $n$  iteradas a passos de tempo  $h$ , ou seja,  $t = nh$ . A expressão para o expoente de Lyapunov fica,

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} \ln \left( \prod_{n=0}^{n-1} |\mathbf{J}(\vec{x}) \cdot \vec{u}_0|_{\vec{x}=\vec{x}_n} \right). \quad (2.10)$$

Como o logaritmo de um produtório pode ser escrito por uma soma de logaritmos, temos a expressão escrita como

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} \ln \left( \sum_{n=0}^{n-1} |\mathbf{J}(\vec{x}) \cdot \vec{u}_0|_{\vec{x}=\vec{x}_n} \right). \quad (2.11)$$

Sobre uma trajetória fechada (que corresponde a uma solução periódica), a distância entre dois pontos se mantém constante, em média, com o passar do tempo, de modo que o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Valor  $\lambda$  positivo indica direção de expansão (instabilidade), devido o termo  $e^{\lambda t}$ , da Eq. 2.8, ser um valor positivo maior que 1. Para o valor de  $\lambda$  negativo, temos direção de contração, pois o termo  $e^{\lambda t}$  será um valor positivo menor que 1. Quando  $\lambda$  é nulo, o termo  $e^{\lambda t}$  é constante igual a 1, indicando estabilidade.

Uma das propriedades do movimento caótico é a divergência exponencial de trajetórias vizinhas, havendo pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Desta forma, podemos resumir a dinâmica associada aos valores dos expoentes de Lyapunov, para um sistema de três equações diferenciais em quatro casos, estática (ponto fixo), periódica (ciclo limite), quaseperiódica e caótica, como citado anteriormente e respectivamente nas Figs. 2.2(a)-(d) mostrados na tabela 5.1.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Dinâmica
–	–	–	estática
0	–	–	periódica
0	0	–	quasiperiódica
+	0	–	caótica

Tabela 2.1: Valores de expoentes de Lyapunov associado as possíveis dinâmicas: estática, periódica, quasiperiódica e caótica.

Fonte: *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows* [58].

No instante  $t > t_0$ , o volume  $V(t)$  da esfera deve ser proporcional ao produto das distâncias  $r_k(t)$  que o caracterizam, isto é:

$$V(t) \propto \prod_{k=1}^3 r_k(t) = V(t_0) e^{(t-t_0) \sum_{k=1}^3 \lambda_k}, \quad (2.12)$$

sendo  $V(t_0)$  o volume no instante inicial  $t_0$ . Se o sistema é conservativo, então  $V(t) = V(t_0)$  para  $t \geq t_0$ , ou em termos dos expoentes de Lyapunov:  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 0$ . Se é dissipativo,  $V(t) < V(t_0)$  para  $t > t_0$ , o que equivale a:  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k < 0$ .

## 2.2 Diagrama de bifurcação

A teoria da bifurcação é o estudo matemático de mudanças na estrutura qualitativa ou topológica de uma determinada família de soluções de equações diferenciais. Mais comumente aplicado ao estudo matemático de sistemas dinâmicos, uma bifurcação ocorre quando uma pequena mudança suave feita nos valores dos parâmetros (os parâmetros de controle) de um sistema causa uma mudança qualitativa ou topológica súbita em seu comportamento [59].

Nosso foco, é utilizar o diagrama de bifurcação para mostrar parte da dinâmica do sistema, como a localização do máximo da variável. Para sistemas contínuos, reduzimos a representação para uma variável versus um parâmetro de controle. Consideramos sempre que a variável seja um máximo (ou mínimo), como o exemplo mostrado na Fig. 2.4. Na Fig. 2.5(a) mostramos uma série temporal com destaque aos máximos que ocorrem dentro de um período (quando a série volta a se repetir). Na Fig. 2.5(b), mostramos a projeção  $X \times Y$ , referente a série temporal.

## 2.3 Integração numérica

Utilizamos integração numérica normalmente quando não é possível obter solução analítica de um sistema de equação. Citamos aqui dois métodos para integração: o método de Euler e o método de Runge-Kutta. A fórmula para o método Euler é,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (2.13)$$

que é solução de  $x_n$ , para  $x_{n+1} \equiv x_n + h$ . A solução segue entre um intervalo  $h$ , mas usa apenas a informação da derivada no início deste intervalo, como mostrado na Fig. 2.6. Isso significa que o erro da etapa é apenas uma potência de  $h$  (passo de integração) menor que a correção, ou seja,  $O(h^2)$  [60]. Normalmente, o método de Euler não é recomendado devido à propagação de erro, prejudicando a solução numérica final. A ordem do método é convencionalmente chamada de  $n$ -ésima ordem se o seu termo de erro for  $O(h^{n+1})$  [60]. O algoritmo Runge-Kutta

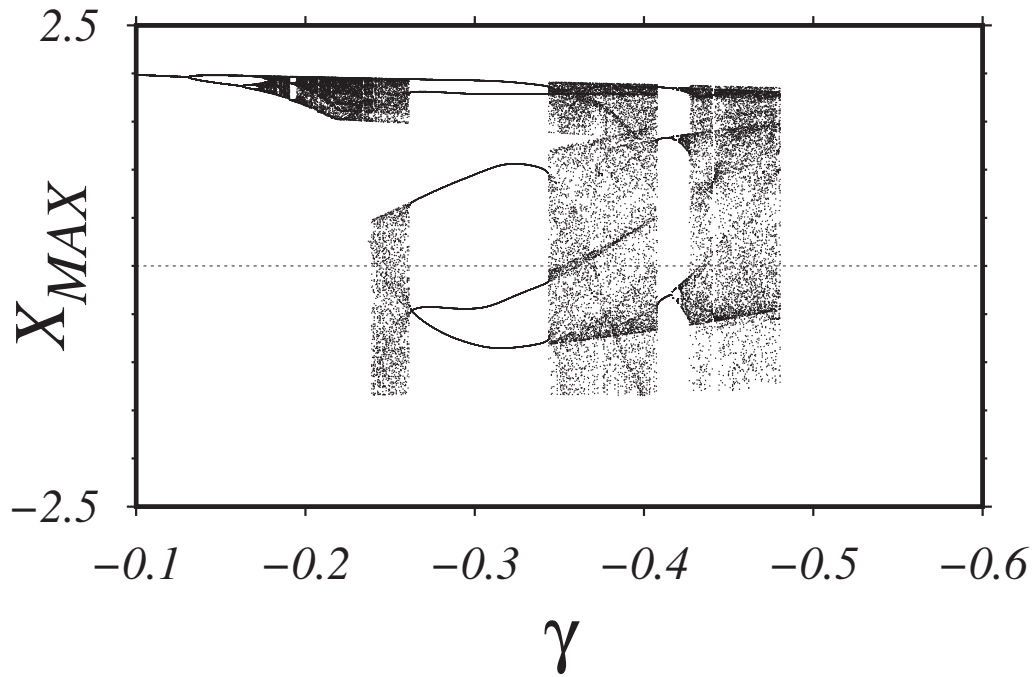


Figura 2.4: Diagrama de bifurcação para um sistema caótico a tempo contínuo (Sistema de Chua). Parâmetro é variado de  $\gamma = -0,1$  a  $\gamma = -0,6$ . Os pontos representam onde ocorrem os máximos para a variável  $X$  com o respectivo parâmetro  $\gamma$ . O exemplo de uma órbita estável, com cinco picos dentro de um período da série temporal, temos em  $\gamma = -0,3$ , também mostrado na Fig. 2.5. O exemplo de uma órbita instável (caos), temos em  $\gamma = -0,45$ .

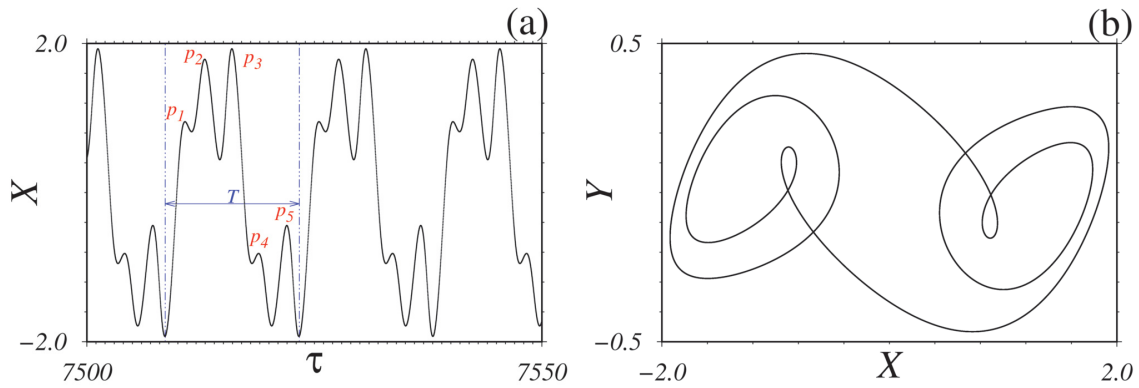


Figura 2.5: (a) Série temporal de uma órbita periódica (Sistema de Chua), destacando os máximos na variável  $X$  (em vermelho  $p_1, p_2, p_3, p_4$  e  $p_5$ ) dentro de um período  $T$ . Os pontos onde ocorrem os picos são os valores considerados para o diagrama de bifurcação no eixo  $X_{MAX}$  da Fig. 2.4. A série temporal refere-se ao caso de  $\gamma = -0,3$  na Fig. 2.4. (b) Espaço de fases  $X \times Y$  referente a série temporal em (a).

de quarta ordem é um método numérico com controle da propagação de erro muito utilizado por cientistas para integração numérica. Para cada passo  $h$  são utilizados quatro etapas, sendo a

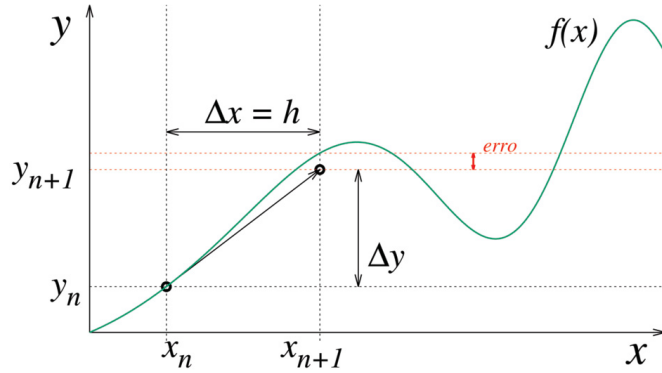


Figura 2.6: Ilustração do método de Euler enfatizando o erro por passo de integração, destacado pelas linhas pontilhadas em vermelho. A linha em verde é a solução analítica.

média ponderada com peso maior aos pontos médios. Matematicamente, o algoritmo é escrito por:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (2.14)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (2.15)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (2.16)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3), \quad (2.17)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \right) + O(h^5), \quad (2.18)$$

sendo  $k_1$  a derivada no início do intervalo,  $k_2$  é a derivada no ponto médio do intervalo, usando a derivada  $k_1$  para determinar o valor de  $y$  no ponto  $x_n + \frac{h}{2}$  através do método de Euler,  $k_3$  é novamente derivada no ponto médio do intervalo, agora usando a derivada  $k_2$  para determinar o valor de  $y$  no ponto  $x_n + \frac{h}{2}$  através do método de Euler e  $k_4$  é a derivada no final do intervalo, com seu valor  $y$  utilizando  $k_3$ . A fig. 2.7 ilustra geometricamente a cada passo do método citado [60].

Como já mencionado, o estudo desta tese é focado na influência de perturbações ruidosas no circuito de Chua, via modelo numérico. O circuito de Chua será descrito por um sistema de equações diferenciais estocásticas. A análise completa das equações diferenciais estocásticas

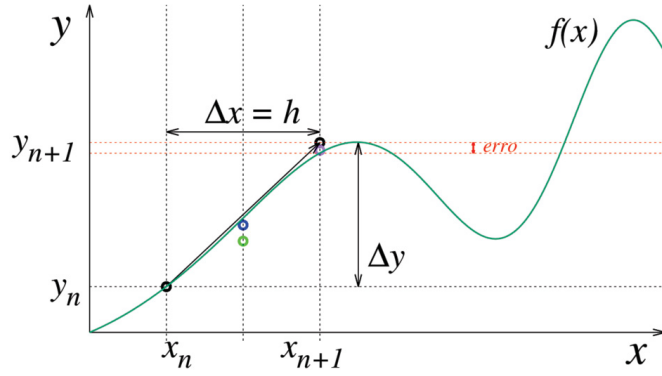


Figura 2.7: Ilustração da iteração para um passo do método Runge-Kutta de quarta ordem. O ponto em preto com as coordenadas  $(x_n, y_n)$  refere-se a  $k_1$ . O ponto em verde refere-se a  $k_2$ . O ponto em azul refere-se a  $k_3$ . O ponto em roxo refere-se a  $k_4$ . A linha em verde refere-se a solução analítica. As linhas pontilhadas em vermelho destacam o erro entre as soluções numérica e analítica.

requer simulações numéricas, comumente feitas com um algoritmo de tipo Euler de primeira ordem. Porém, enfatizando o que já foi dito, tal método inclui propagação de erro não desejado. Para maior precisão, utilizamos um método que estende o algoritmo de Runge-Kutta para incluir os termos estocásticos que seguem uma distribuição gaussiana [61]. Vamos agora considerar a equação diferencial de uma variável adicionando o ruído, temos

$$\dot{x} = f(x) + \xi(t), \quad (2.19)$$

onde  $\xi(t)$  é uma função gaussiana com propriedades de média temporal  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  e variância  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2A \delta(t - t')$ . Tal componente estocástica, perturba cada etapa do passo Runge-Kutta, ou seja, temos o produto da raiz da variância com o valor aleatório somado em cada etapa do integrador, logo nossa variável sofre uma perturbação nessas etapas, representado na Fig.2.8 pela região cinza que contorna os pontos em preto, azul, verde e roxo. A inclusão da estocasticidade no algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem é escrita por [61]:

$$k_1 = f(x_n, y_n + \sqrt{2Ah}(a_1\phi_1 + b_1\phi_2)), \quad (2.20)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2} + \sqrt{2Ah}(a_2\phi_1 + b_2\phi_2)\right), \quad (2.21)$$



$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2} + \sqrt{2Ah}(a_3\phi_1 + b_3\phi_2)\right), \quad (2.22)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3 + \sqrt{2Ah}(a_4\phi_1 + b_4\phi_2)), \quad (2.23)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right) + \sqrt{2Ah}(\phi_1 + \phi_2) + O(h^5). \quad (2.24)$$

Sendo a Eq. 2.24 a utilizada para integração estocástica com ruído gaussiano. Os valores de  $a_i$  e  $b_i$  são definidos na tabela 2.2 obtidos da referência [62].

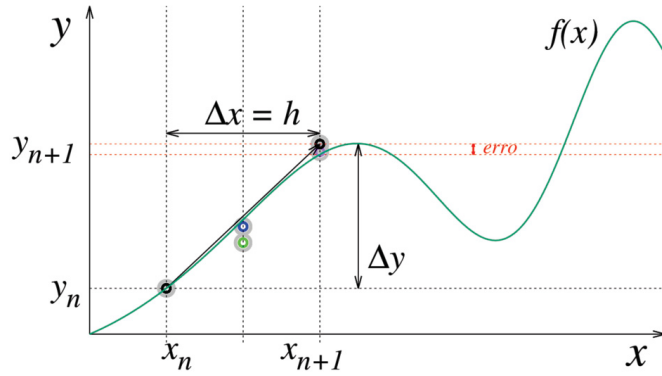


Figura 2.8: Ilustração da iteração para um passo do método Runge-Kutta de quarta ordem estocástico, similar a Fig. 2.7. A região em cinza em volta dos pontos representam o possível deslocamento dos valores devido a função estocástica gaussiana.

$i$	$a_i$	$b_i$
1	$1/4 + \sqrt{3}/6$	$1/4 - \sqrt{3}/6 + \sqrt{6}/12$
2	$1/4 + \sqrt{3}/6$	$1/4 - \sqrt{3}/6 - \sqrt{6}/12$
3	$1/2 + \sqrt{3}/6$	$1/2 - \sqrt{3}/6$
4	$5/4 + \sqrt{3}/6$	$5/4 - \sqrt{3}/6 + \sqrt{6}/12$

Tabela 2.2: Valores das constantes  $a_i$  e  $b_i$  definidos para o integrador Runge-Kutta de quarta ordem estocástico.

Fonte: *Stochastic Runge-Kutta Algorithms. II. Colored noise* [62].

Com  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sendo variáveis aleatórias que pertencem a distribuição gaussiana. Numericamente são calculadas utilizando o algoritmo de *Box e Muller* [63], seguindo as expressões matemáticas,

$$\phi_1 = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V), \quad (2.25)$$

$$\phi_2 = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V). \quad (2.26)$$

As variáveis  $U$  e  $V$  são aleatórias que pertencem a distribuição uniforme. Na Fig. 2.9(a) mostra o espaço de fase das variáveis aleatórias  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Na Fig. 2.9(b) a série temporal da variável aleatória  $\phi_2$ . Na Fig. 2.9(c) o histograma da posição no tempo da variável aleatória  $\phi_1$ .

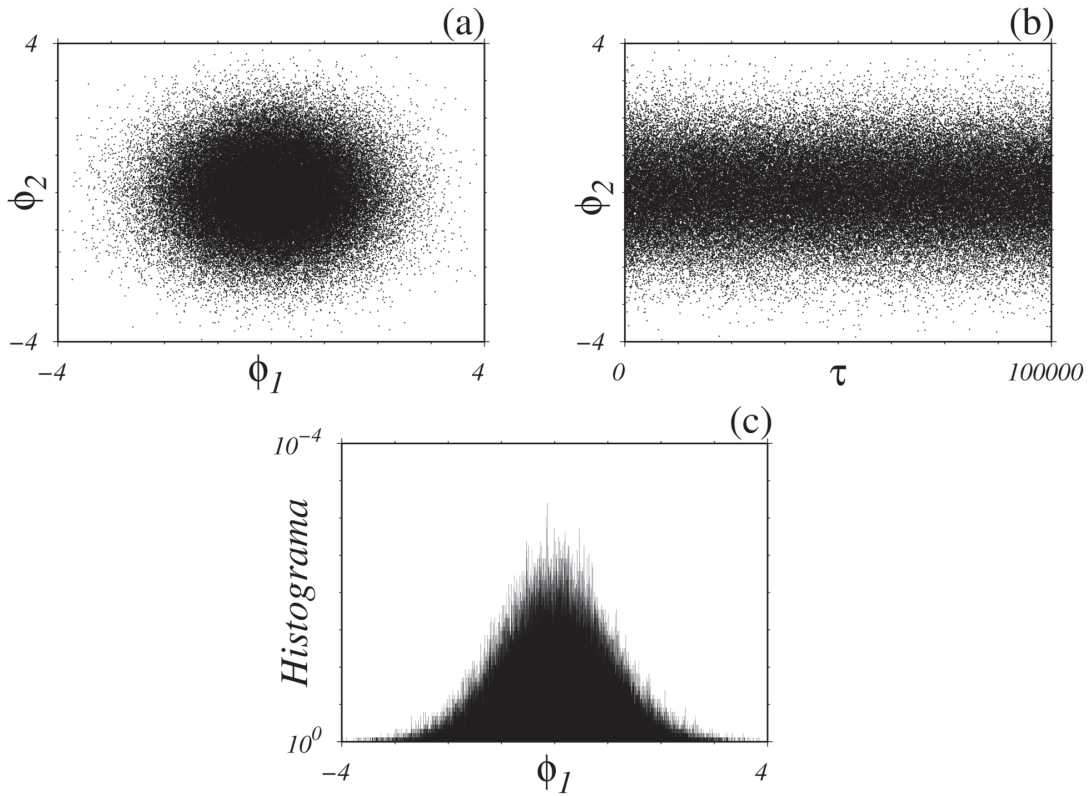


Figura 2.9: Gráficos das variáveis aleatórias obtidas pelo algoritmo numérico mostrando que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  pertencem a uma distribuição gaussiana. (a) Espaço de fases das variáveis aleatórias  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . (b) Série temporal da variável aleatória  $\phi_2$ . (c) Histograma da posição no tempo da variável aleatória  $\phi_1$ .

### 3 Osciladores

Neste capítulo, abordamos os tópicos de osciladores lineares e não lineares. Iniciamos pelo exemplo do oscilador mecânico amortecido e sistemas análogos, onde mencionamos o conceito de computação analógica, quando configuramos circuitos eletrônicos para produzir a dinâmica de um sistema de equações diferenciais. Mencionamos os osciladores não lineares, Van der Pol para sistemas de duas equações diferenciais e o circuito de Chua para o exemplo de sistema de três equações diferenciais.

#### 3.1 Osciladores lineares

As oscilações lineares são observadas em outros sistemas além das pequenas oscilações massa-mola e do pêndulo simples. A mesma formulação matemática se aplica a uma quantidade significativa de sistemas físicos. Para sistemas mecânicos incluem o pêndulo de torção, corda ou membranas vibratórias e vibrações elásticas de barras ou placas [64]. Podemos observar o sistema mecânico de forma análoga aos sistemas acústicos. Nesse caso, as moléculas do ar vibram. Podemos ter ressonâncias que dependem do meio e as dimensões do mesmo. Vários fatores provocam amortecimento, incluindo o atrito e a radiação das ondas de rádio [64]. Quando a luz (consistindo de radiação eletromagnética de alta frequência) incide sobre o material, ela provoca vibrações de átomos e moléculas. Quando a luz, tendo uma das frequências ressonantes do sistema atômico ou molecular, incide sobre o material, a energia eletromagnética é absorvida, provocando a oscilação dos átomos e moléculas com grande amplitude. A mecânica quântica utiliza a teoria dos osciladores lineares para explicar muitos dos fenômenos associados à absorção, dispersão e radiação da luz [64]. Entretanto, os circuitos elétricos são os exemplos mais observados de oscilações não mecânicas. Na verdade, por causa de sua grande importância prática, o exemplo elétrico foi tão extensamente investigado que a situação é, com frequência invertida e as vibrações mecânicas são analisadas em termos do “circuito elétrico equivalente” [64]. Mostramos na Tabela 3.1 exemplos de quantidades mecânicas e elétricas análogas.

Seguindo nesta ideia de sistemas análogos, há uma metodologia de implementação de circuitos elétricos que produzem a dinâmica de um sistema de equações, denominada de computação analógica [65]. São circuitos configurados de forma a realizar as operações de soma, integral, diferencial, inversora entre outras. A lei de Kirchhoff aplicada a esses circuitos

	Mecânicas		Elétricas
$x$	deslocamento	$q$	carga
$\dot{x}$	velocidade vetorial	$\dot{q} = I$	corrente
$m$	massa	$L$	indutância
$b$	resistência de amortecimento	$R$	resistência
$1/k$	conformidade mecânica	$C$	capacitância
$F$	amplitude da força aplicada	$\epsilon$	Amplitude da força eletromotriz induzida

Tabela 3.1: Quantidades mecânicas e elétricas análogas.

Fonte: *Dinâmica clássica de partículas e sistemas* [64].

equivale às operações matemáticas citadas. Nas Figs. 3.1-3.4 mostramos exemplos de circuitos utilizados na computação analógica. Os  $V_n$  são referentes aos valores das tensões de entrada,  $R_n$  os valores das resistências e  $C_n$  os valores das capacitâncias e  $V_o$  o valor de tensão obtido. O símbolo na forma de um triângulo é o utilizado para representar o circuito integrado chamada de amplificador operacional. Na figura 3.1, mostramos o esquema elétrico para o circuito integrador. A tensão elétrica de saída  $V_o$  segue a expressão matemática,

$$V_o = -\frac{1}{C_1} \int \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_n}{R_n} \right) dt. \quad (3.1)$$

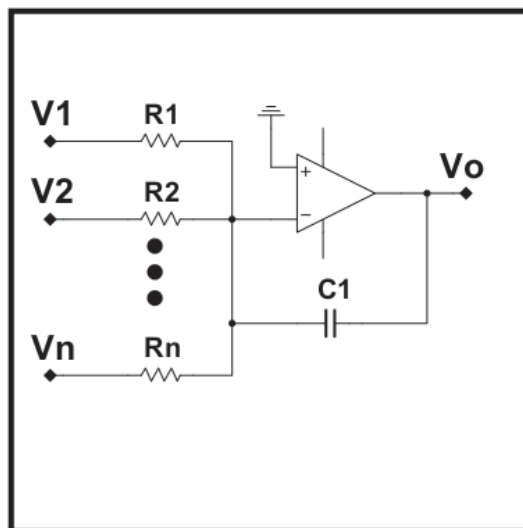


Figura 3.1: Esquema eletrônico para o circuito análogo integrador. A tensão de saída  $V_o$  é obtida pela Eq. 3.1.

Na Fig. 3.2, mostramos o circuito equivalente a soma. A expressão matemática segue,

$$V_o = -R_f \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_n}{R_n} \right). \quad (3.2)$$

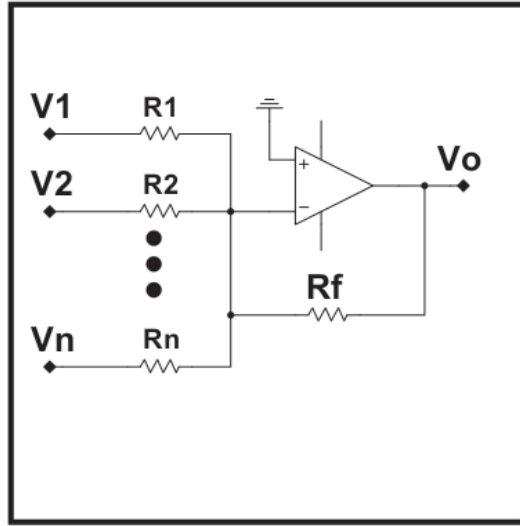


Figura 3.2: Esquema eletrônico para o circuito análogo somador. A tensão de saída  $V_o$  é obtida pela Eq. 3.2.

Na Fig. 3.3, mostramos o circuito diferenciador. O valor de tensão de saída para este circuito segue a expressão,

$$V_o = -\frac{1}{R_f C_1} \frac{dV_i}{dt}. \quad (3.3)$$

Na Fig. 3.4, mostramos o circuito inversor. O valor de tensão de saída para este circuito segue a expressão,

$$V_o = -\frac{R_f}{R_1} V_i. \quad (3.4)$$

A utilização de amplificadores operacionais é fundamental nesta abordagem Ref. [65, 66, 67]. O movimento representado pelo oscilador harmônico simples é denominado oscilação livre, sendo que, uma vez em oscilação, o movimento nunca cessará. Esse fato simplifica muito o caso físico real, no qual as forças de dissipação ou atrito finalmente amortecerão o movimento até o ponto no qual nenhuma oscilação ocorrerá. Nesse caso, podemos analisar o movimento incorporando na equação diferencial um termo representativo da força de amortecimento. Não parece razoável que a força de amortecimento deva, em geral, depender do deslocamento, mas ela

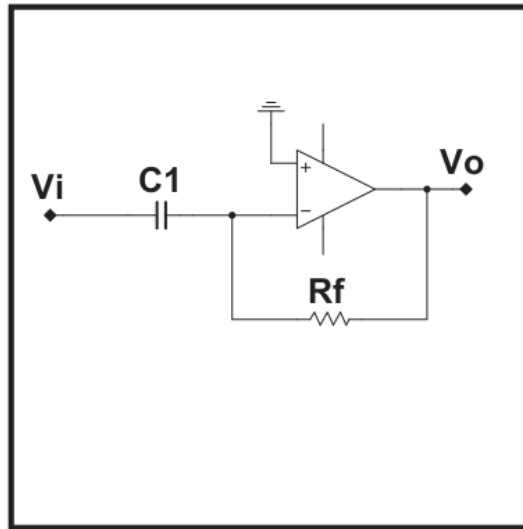


Figura 3.3: Esquema eletrônico para o circuito análogo diferenciador. A tensão de saída  $V_o$  é obtida pela Eq. 3.3.

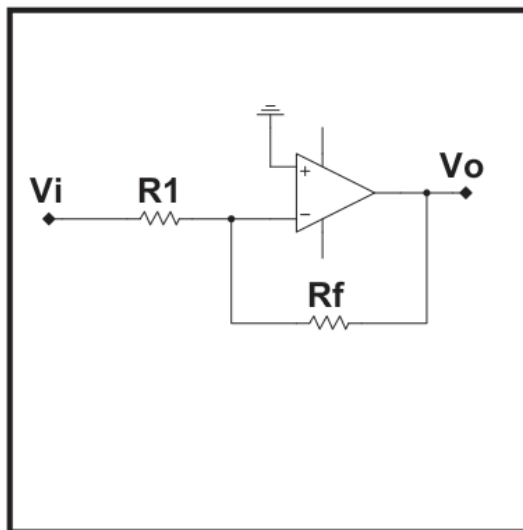


Figura 3.4: Esquema eletrônico para o circuito análogo inversor. A tensão de saída  $V_o$  é obtida pela Eq. 3.4.

poderia ser uma função da velocidade, ou talvez de alguma derivada temporal do deslocamento de ordem mais alta. Com frequência adota-se a premissa de que a força de amortecimento é uma função linear da velocidade vetorial,  $\vec{F}_d = \alpha \vec{v}$  [64]. Consideramos aqui apenas oscilações amortecidas unidimensionais, por exemplo o sistema mecânico mostrado na Fig. 3.5, o sistema elétrico mostrado na Fig. 3.6 e o sistema via computação analógica mostrado na Fig. 3.7. Para esses três casos, a dinâmica é mostrada na Fig. 3.8. A respectiva representação do sistema de equação adimensional é dado por,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.5)$$

sendo  $\beta$  e  $\omega_0$  o fator de amortecimento e a frequência natural, respectivamente. As relações entre as grandezas físicas são distintas para cada caso. No caso mecânico, ilustrado na Fig. 3.5,  $\beta = \frac{m}{2b}$  e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , com  $m$  a massa do objeto,  $b$  o fator de amortecimento e  $k$  a constante elástica da mola. No caso elétrico, ilustrado na Fig. 3.6,  $\beta = \frac{R}{2L}$  e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ , com  $R$  o valor da resistência,  $L$  o valor da indutância e  $C$  o valor da capacitância. Para a computação analógica, ilustrada na Fig. 3.7, os valores dos parâmetros seguem as relações  $2\beta = \frac{R7}{R5}$  e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{R7}{R4}}$ .

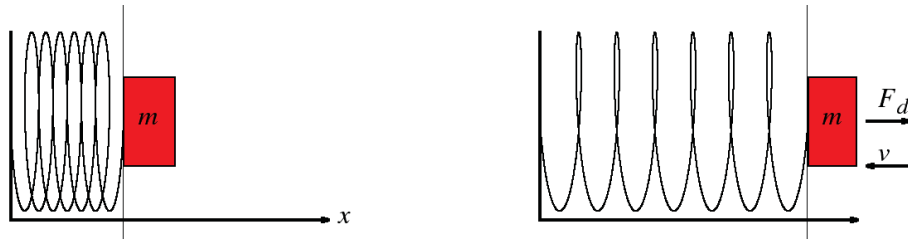


Figura 3.5: Ilustração de um oscilador mecânico massa mola com dissipação.  $\vec{F}_d$  representa a força de amortecimento sempre contrária ao sentido  $v$  do movimento de  $m$ .

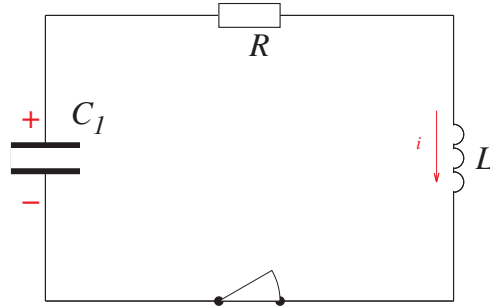


Figura 3.6: O circuito RLC iniciando com o capacitor carregado.

Reescrevendo a Eq. 3.5 em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\beta y, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

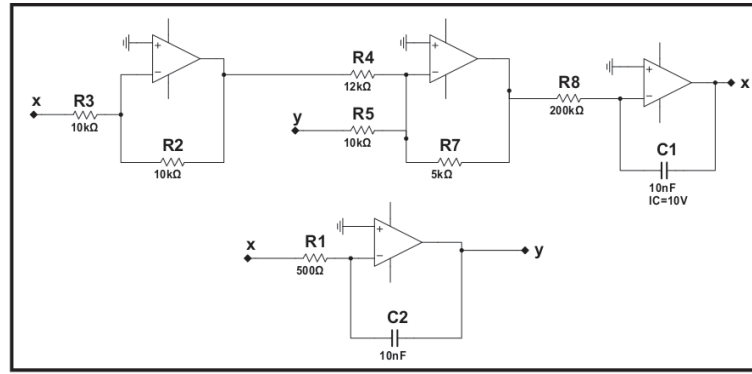


Figura 3.7: Circuito obtido via metodologia de computação analógica para integrar a equação  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ . Iniciando com o capacitor C1 carregado.

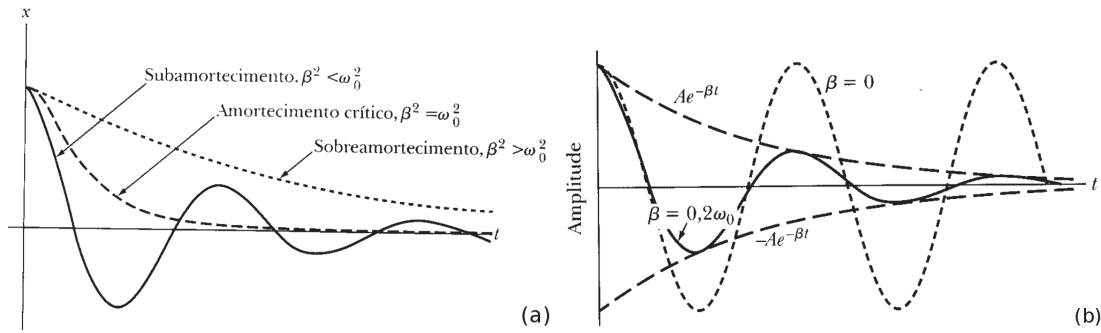


Figura 3.8: (a) Oscilador amortecido para os três casos (subamortecido, amortecimento crítico e sobreamortecimento). Linha cheia o caso subamortecido, linha pontilhada o caso sobreamortecimento e linha tracejada o caso criticamente amortecido. (b) Linha cheia subamortecido, linha pontilhada o caso sem dissipação, linha tracejada o fator de atenuação da amplitude.

Fonte: *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*[64].

A escrita na forma  $\dot{\vec{F}} = \mathbf{A}\vec{F}$ , nos facilita pois a matriz  $\mathbf{A}$  é igual ao jacobiano do sistema. Assim, podemos discutir por via qualitativa a estabilidade do sistema.

Primeiro, calculando o divergente do sistema,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , obtemos  $-2\beta$ . Para  $\beta = 0$ , o divergente é nulo e com isso concluímos que o sistema é conservativo. Para o hipotético caso  $\beta < 0$ , temos o divergente maior que zero, significa que há uma região onde o sistema é amplificado. Para  $\beta > 0$ , o divergente é negativo, configurando um sistema dissipativo.

A segunda análise qualitativa é o cálculo dos autovalores, via  $\text{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ . Obtendo, os autovalores  $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$  e  $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ . Novamente, fazendo  $\beta = 0$ , voltamos ao caso do oscilador harmônico simples, com autovalores puramente imaginários,  $\lambda_1 = +i\omega_0$  e  $\lambda_2 = -i\omega_0$ . Para  $\beta$  como o proposto parâmetro dissipativo, temos três casos envolvidos.

1. Quando  $\beta^2$  é maior que  $\omega_0^2$ :  $\lambda$  é solução é real e negativa. Esse caso é conhecido como sobreamortecido (linha pontilhada mostrada na Fig. 3.8(a)).



2. Quando  $\beta^2$  é menor que  $\omega_0^2$ :  $\lambda$  a solução tem parte real negativa e parte complexo conjugado. Esse caso é conhecido como subamortecimento. (linha cheia mostrada na Fig. 3.8(a)).

3. Quando  $\beta^2$  é igual ao  $\omega_0^2$ :  $\lambda$  é único igual a  $-\beta$ . Esse caso conhecido como amortecimento crítico (linha tracejada mostrada na Fig. 3.8(a)).

O movimento dos três casos é mostrado esquematicamente na Fig. 3.8 para condições iniciais específicas. Veremos que somente o caso de subamortecimento resulta em movimento oscilatório.

O movimento subamortecido, pode ser dividido na equação em duas partes. Uma amplitude com decaimento exponencial ao longo do tempo  $t$  e uma função exponencial  $e^{-i\omega t}$ , caracterizando uma oscilação do sistema, lembrando de  $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ . Sendo o único caso onde ocorre um movimento oscilatório. Podemos concluir que a parte imaginária implica na existência de um sistema oscilante. Nesse caso, devido ao termo de dissipação, passado um tempo assintótico, a amplitude será zero, convergindo a oscilação ao ponto fixo. Também podemos concluir que a oscilação convergiu ao ponto fixo, devido a parte real ser negativa. Caso houvesse, uma solução com parte real positiva e parte imaginária, teríamos um sistema amplificado, divergindo ao evoluir o tempo.

Do ponto de vista de sistemas dinâmicos, temos que para sistemas de duas equações diferenciais autônomas, segundo os estudos de Poincaré, o retrato de fase pode ser definido pela relação entre o traço da matriz e o determinante. Toda a dinâmica para sistemas de duas equações diferenciais autônomas pode ser discutida qualitativamente desta forma. Em resumo, mostramos a Fig. 3.9 que mostra via gráfico qualitativo a relação entre autovalores e o determinante da matriz. Para a matriz,  $\mathbf{A}_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  obtemos os autovalores buscando as raízes da equação característica, sendo escrita por  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ . O termo constante nesta equação é  $\det\mathbf{A}$ . O coeficiente de  $\lambda$  também tem um nome: a quantidade  $a + d$  é chamada de traço de  $\mathbf{A}$  e é denotada por  $\text{tr}\mathbf{A}$ . Assim, os autovalores satisfazem:

$$\lambda^2 - (\text{tr}\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A} = 0, \quad (3.7)$$

e podem ser escritos por,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( \text{tr}\mathbf{A} + \sqrt{(\text{tr}\mathbf{A})^2 - 4(\det\mathbf{A})} \right), \quad (3.8)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \text{tr} \mathbf{A} - \sqrt{(\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4(\det \mathbf{A})} \right). \quad (3.9)$$

Note que  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr} \mathbf{A}$  e  $\lambda_1 \lambda_2 = \det \mathbf{A}$ , então o traço é a soma dos autovalores de  $\mathbf{A}$  enquanto o determinante é o produto dos autovalores de  $\mathbf{A}$ . Também escrevemos  $T = \text{tr} \mathbf{A}$  e  $D = \det \mathbf{A}$ . Conhecer  $T$  e  $D$  nos diz os autovalores de  $\mathbf{A}$  e, portanto, praticamente tudo sobre a geometria de soluções do sistema. Por exemplo, os valores de  $T$  e  $D$  nos dizem se as soluções em espiral são para dentro ou para fora da origem, se temos um centro, e assim por diante. Podemos exibir essa classificação visualmente, ilustrando uma imagem no plano traço  $\times$  determinante ( $T \times D$ ), mostrado na Fig. 3.9, uma matriz com traço  $T$  e determinante  $D$  corresponde ao ponto com coordenadas  $(T, D)$ . A localização deste ponto no plano- $TD$ , em seguida, determina a geometria do retrato de fase. Por exemplo, o sinal de  $T^2 - 4D$  nos diz que os autovalores são [57]:

1. Complexos com parte imaginária diferente de zero se  $T^2 - 4D < 0$ ;
2. Reais e distintos se  $T^2 - 4D > 0$ ;
3. Reais e repetidos se  $T^2 - 4D = 0$ ;

A localização de  $(T, D)$  relativo a parábola  $T^2 - 4D = 0$  no plano- $TD$  nos diz tudo o que precisamos saber sobre os autovalores de  $\mathbf{A}$  de um ponto de vista algébrico. Em termos de retratos de fase, no entanto, podemos dizer mais. Se  $T^2 - 4D < 0$ , então a parte real dos autovalores é  $T/2$ , e assim temos um:

1. Sumidouro espiral se  $T < 0$ , ilustrado na Fig. 3.9(a);
2. Uma fonte espiral se  $T > 0$ , ilustrado na Fig. 3.9(b);
3. Centro se  $T = 0$ , ilustrado na Fig. 3.9(d).

Se  $T^2 - 4D > 0$ , temos um desdobramento similar nos casos. Se  $D < 0$ , então temos uma sela, ilustrado na Fig. 3.9(f). Isto segue desde que  $D$  é o produto dos autovalores, um dos quais deve ser positivo, o outro negativo. Então  $D = 0$  e  $T \neq 0$ , temos um auto valor nulo, enquanto ambos autovalores desaparecem se  $D = T = 0$ .

### 3.2 Osciladores não lineares

Para sistemas não lineares, o estudo de estabilidade da trajetória é feita em cada ponto, através do jacobiano no ponto, como discutido no capítulo 2. O oscilador de Van der Pol, foi muito utilizado em rádios, é um sistema que possui uma oscilação auto-sustentada, com um

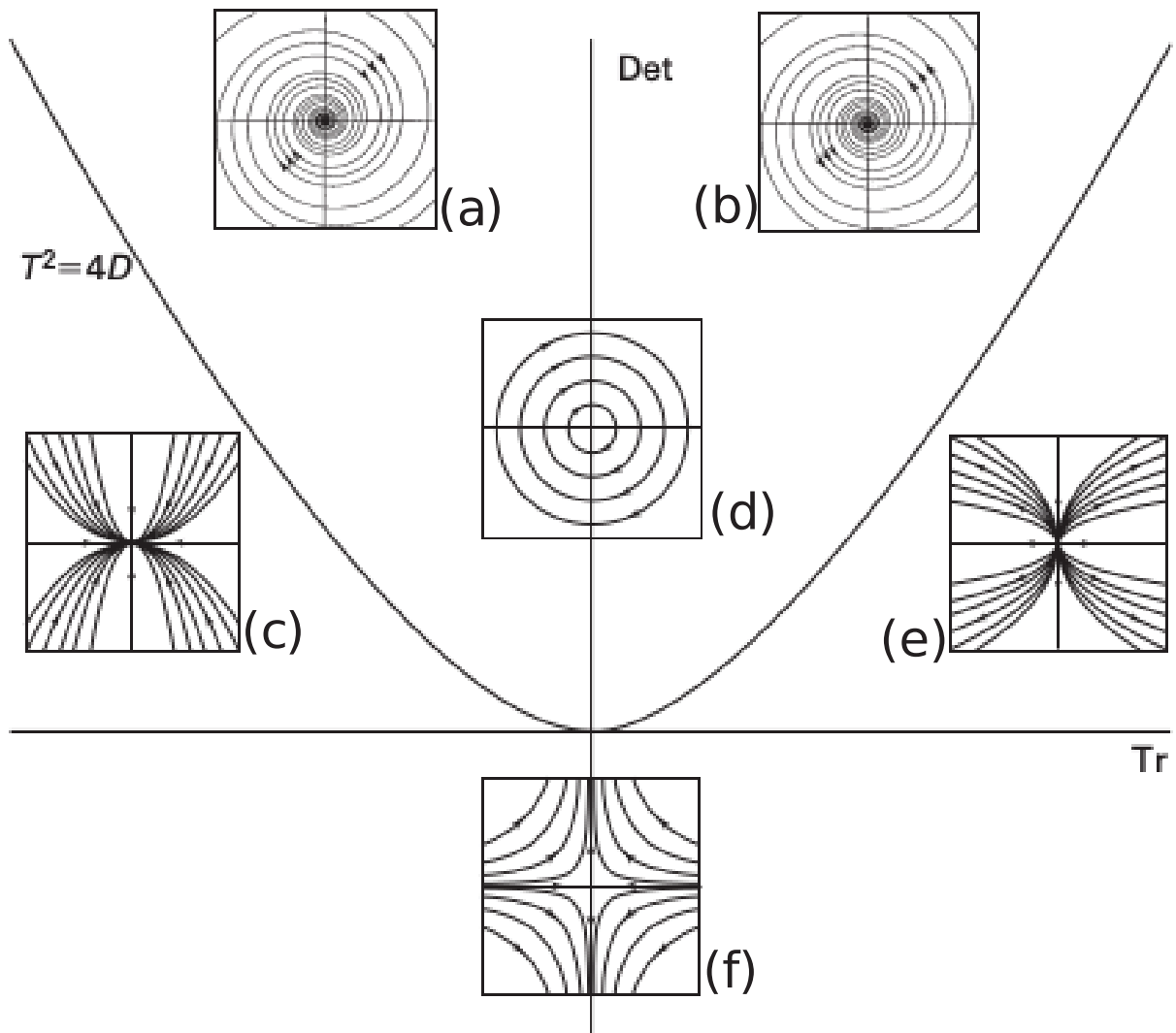


Figura 3.9: Classificação dos retratos de fases para sistemas planares via diagrama de Poincaré. (a) sumidouro espiral, (b) fonte espiral, (c) sumidouro, (d) Centro, (e) fonte e (f) Sela.

Fonte: *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* [57].

parâmetro de dissipação  $\mu$  não linear. A equação é conhecida por descrever a corrente elétrica que atravessa uma válvula triodo, sendo escrita por:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\mu(x^2 - 1)y - x. \end{cases}$$

Se aplicarmos o divergente no sistema de equações e igualando a zero, obtemos a seguinte relação,

$$-\mu(x^2 - 1) = 0. \quad (3.11)$$

Isso indica que quando o módulo de  $x$  for menor que 1, temos o divergente maior que zero. Logo o sistema está numa região de amplificação. Quando o módulo de  $x$  for maior que 1, temos o divergente menor que zero, sendo um regime de dissipação. Então há um intervalo onde o sistema ganha energia e outro que perde energia, fazendo uma oscilação auto sustentada entre o ganho e perda, configurando uma dinâmica de ciclo limite, como mostrado nas Fig. 3.10(a) e sua respectiva série temporal para a variável  $x$  na Fig. 3.10(b).

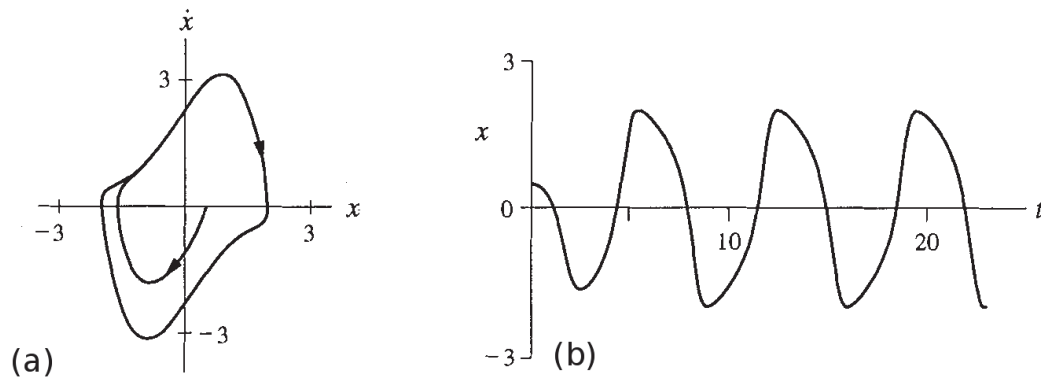


Figura 3.10: (a) Espaço de fase para o oscilador de Van de Pol e (b) Série temporal para a variável  $x$ .

Fonte: *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering* [21].

Outro oscilador não linear, agora para um sistema de três equações diferenciais autônomas, onde há uma região de dissipação e de amplificação é o circuito de Chua, sendo um circuito eletrônico capaz de produzir oscilações periódicas ou caóticas, de acordo com a variação dos parâmetros do circuito [68]. O circuito de Chua foi proposto intencionalmente para evidenciar o comportamento caótico é da natureza dos sistemas dinâmicos [41]. O circuito é proposto pela combinação de resistores, capacitores, indutor e uma componente não linear, chamado de diodo de Chua, sendo responsável em fornecer energia ao sistema, devido a sua região de condutância diferencial negativa. É possível construir de muitas maneiras esse circuito [26]. Aqui mostramos a configuração utilizada por dois parâmetros de controle, os resistores variáveis  $R$  e  $r_L$ . Na Fig. 3.11(a) mostra o esquema elétrico e (b) a resposta da corrente do diodo de Chua pelo valor de tensão aplicado.

Lembrando das duas leis de Kirchhoff, a lei dos nós: a soma das correntes que o saem do nó é igual a soma das correntes que chegam até o nó. Matematicamente temos [69],

$$\sum_n i_n = 0. \quad (3.12)$$

Sendo  $i$  a corrente e  $n$  o índice das correntes elétricas que chegam ou saem do nó. A outra lei de Kirchhoff é a lei das malhas: a soma das tensões elétricas numa malha fechada é nula. Matematicamente temos,

$$\sum_n V_n = 0. \quad (3.13)$$

Sendo  $V$  a tensão elétrica e  $n$  o índice. As relações entre corrente e tensão para os componentes utilizados são [69]:

1. Resistor: componente que dissipa energia em forma de calor e obedece a Lei de Ohm,  $i_R = \frac{V_R}{R}$ , com  $i_R$  e  $V_R$  sendo a corrente e tensão elétrica do resistor  $R$ ;
2. Capacitor: carga num capacitor é dada por  $q = CV_C$ , sendo a corrente a derivada temporal da carga, então temos,  $i_C = C \frac{dV_C}{dt}$ , sendo  $C$  a capacitância e  $V_C$  a tensão elétrica no capacitor.
3. O fluxo  $\phi$  que atravessa um indutor é o resultado  $\phi = Li$ . Quando a corrente varia, o fluxo cria uma diferença de potencial no indutor, de forma a opor-se a essa variação, assim a tensão no indutor é dado por  $V_L = -L \frac{di_L}{dt}$ .

Aplicando a lei dos nós, a esquerda de  $R$ , na Fig. 3.11(a), temos:

$$i_{V_{C_1}} - i_R + i_D = 0 \rightarrow C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} + \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R} + i_D = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{RC_1} - \frac{i_D}{C_1}. \quad (3.15)$$

Aplicando a lei dos nós, a direita de  $R$ , na Fig. 3.11(a), temos:

$$i_{V_{C_2}} + i_R - i_L = 0 \rightarrow C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} + \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R} - i_L = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2}. \quad (3.17)$$

Aplicando a lei das malhas, no circuito oscilador  $LC_2$ , a esquerda na Fig. 3.11(a), temos,

$$V_L + V_{r_L} = V_{C_2} \rightarrow -L \frac{di}{dt} - i_L r_L = V_{C_2}, \quad (3.18)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{V_{C_2}}{L} - \frac{i_L \cdot r_L}{L}. \quad (3.19)$$

Reescrevendo as equações obtidas, temos o seguinte conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas,

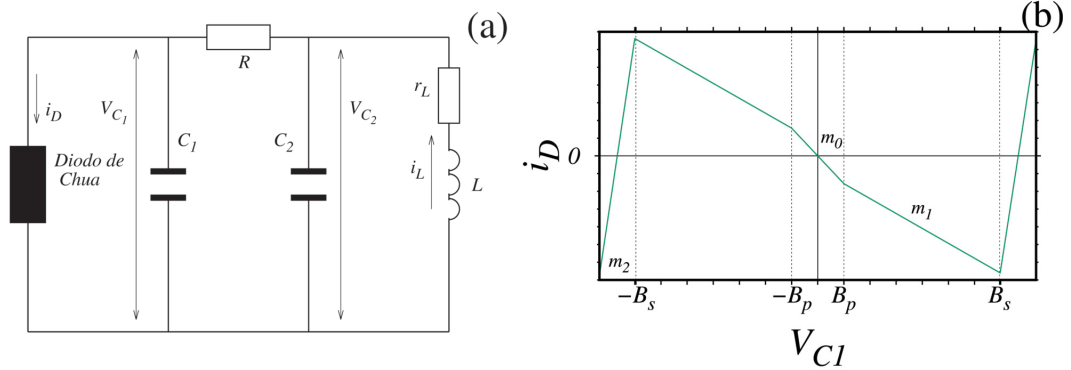


Figura 3.11: (a) Modelo do circuito canônico onde  $V_{C1}$  e  $V_{C2}$  representam as tensões elétricas nos capacitores  $C_1$ ,  $C_2$ , respectivamente,  $i_L$  e  $i_D$  representam as correntes elétricas que atravessam o indutor  $L$  e o diodo de Chua, respectivamente e (b) a função linear por cinco-partes para corrente-voltagem.

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{V_{C2} - V_{C1}}{RC_1} - \frac{i_D}{C_1}, \quad \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{V_{C1} - V_{C2}}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2}, \quad \frac{di_L}{dt} = -\frac{V_{C2}}{L} - \frac{i_L \cdot r_L}{L}, \quad (3.20)$$

com  $\frac{dV_{C1}}{dt}$ ,  $\frac{dV_{C2}}{dt}$  sendo as derivadas temporais da tensão dos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente,  $\frac{di_L}{dt}$  a derivada temporal da corrente que atravessa o indutor  $L$ .  $R$  e  $r_L$  são resistores e  $i_D$  é a corrente característica do diodo de Chua obtida por

$$i_D = \begin{cases} m_0 V_{C1}, & |V_{C1}| \leq B_p, \\ \pm(m_0 - m_1)B_p + m_1 V_{C1}, & B_s \geq |V_{C1}| \geq B_p, \\ \pm(m_0 - m_1)B_p \pm (m_1 - m_2)B_s + m_2 V_{C1}, & |V_{C1}| \geq B_s. \end{cases}$$

com  $m_0$ ,  $m_1$  e  $m_2$  as admitâncias. A Fig. 3.11(b) mostra a curva característica  $V_{C1} \times i_D$ , sendo  $m_0$  e  $m_1$  valores negativos. Seguindo o experimento mostrado recentemente [32], no modelo usamos a versão indutor eletrônico [25], sendo construído com capacitores, resistores, e amplificadores operacionais, que produzem uma indutância equivalente  $L_{eq}$ . O esquema elétrico para o indutor eletrônico é mostrado na Fig. 3.12. O valor de indutância de indutância é obtido pela relação,

$$L_{eq} = \frac{R_7 R_9 R_{10} C_3}{R_8}. \quad (3.21)$$

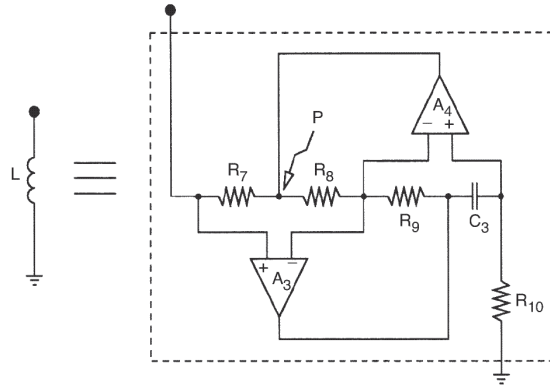


Figura 3.12: Esquema elétrico do indutor eletrônico. A indutância equivalente segue a relação  $L_{eq} = \frac{R_7 R_9 R_{10} C_3}{R_8}$ .  $P$  é o ponto de referência para medir a tensão do indutor  $V_L$ .

Fonte: *Inductorless Chua's circuit* [25].

As vantagens de utilizar o indutor eletrônico ao invés do indutor real são: menor custo de produção, é possível obter qualquer valor de indutância, menos susceptível a interferências eletromagnéticas e ocupa menos espaço físico no circuito eletrônico.

Quanto a dinâmica do circuito de Chua, fazendo similar ao que foi feito para o oscilador Van der Pol, aplicando o divergente no sistema de equações  $\vec{F}(V_1, V_2, i_L)$ , temos:

$$\nabla \cdot \vec{F}(V_1, V_2, i_L) = -\frac{1}{RC_1} - \frac{1}{C_1} \frac{\partial i_D}{\partial x} - \frac{1}{RC_2} - \frac{1}{C_2}. \quad (3.22)$$

Os parâmetros  $R, r_L, C_1, C_2, L$  são positivos, logo, para o sistema ter uma região de amplificação dependerá da função  $i_D$ . Logo, a derivada parcial em  $i_D$  fica,

$$\frac{\partial i_D}{\partial V_{C_1}} = \begin{cases} m_0, & |V_{C_1}| \leq B_p, \\ m_1, & B_s \geq |V_{C_1}| \geq B_p, \\ m_2, & |V_{C_1}| \geq B_s. \end{cases}$$

$m_0$  e  $m_1$  são negativos, consistindo numa região de amplificação e sobre o regime  $m_2$  uma região de dissipação, podendo haver um equilíbrio suficiente para apresentar dinâmica oscilante auto sustentada. Os pontos fixos são obtidos fazendo as derivadas igual a zero, chegando a relação  $V_{C_1} = -i_D(r_L + R)$  ou  $i_D = -\frac{V_{C_1}}{(r_L + R)}$ .

## 4 Chua canônico

Neste capítulo dissertamos o efeito do ruído no circuito de Chua, simulados por integração numérica. O ruído intrínseco, existente em experimentos reais dos circuitos eletrônicos, são descritos teoricamente usando o ruído gaussiano. Para isto, integramos numericamente as equações de movimento do circuito de Chua usando o integrador Runge-Kutta estocástica de quarta ordem. À função aleatória pertencente a uma distribuição gaussiana é obtida pelo algoritmo de Box e Muller [63]. Estruturas periódicas no espaço de parâmetros, relacionadas ao movimento periódico, são inicialmente destruídas à medida que a intensidade do ruído é aumentada até um valor de intensidade crítica, obtendo somente movimento caótico. Buscamos o intervalo de intensidade de ruído equivalente ao resultado experimental para o espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov (MEL), mostrado na Fig. 4.1, publicado por Sousa *et. al.* [32]. Este capítulo está organizado em duas seções. A primeira seção demonstra como obtêm-se o sistema de equações a serem integradas. A segunda seção mostra os resultados numéricos.

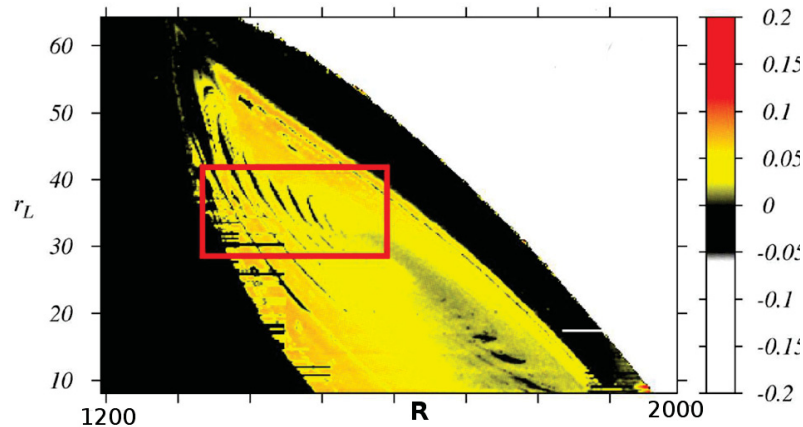


Figura 4.1: MEL obtido pelo cálculo das séries temporais de um circuito de Chua real. Os pontos em amarelo e vermelho representam dinâmica caótica. Os pontos em preto representam dinâmica periódica. Os pontos em branco representam pontos fixos. A caixa em vermelho refere-se a magnificação apresentada na Fig. 4.6.

Fonte: *Parameter space of experimental chaotic circuits with high-precision control parameters* [32].

### 4.1 Sistema de equações adimensionalizadas

O circuito de Chua canônico, sem ruído, foi mostrado na Fig. 3.11(a). A fonte de ruído é considerada em série no sub-circuito  $r_L LC_2$ , destacado em vermelho na Fig. 4.2. Fisicamente,



a fonte de tensão  $\eta(t)$  representa todo o ruído intrínseco do circuito e matematicamente gera valores aleatórios de amplitude de tensão.

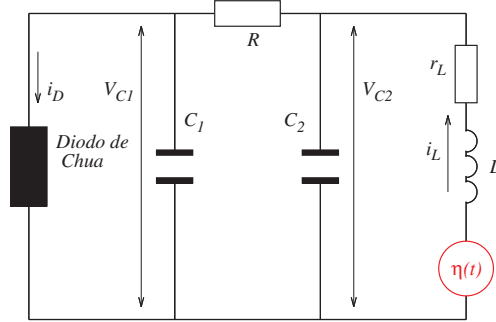


Figura 4.2: Esquema eletrônico simplificado do Circuito de Chua com a fonte de ruído  $\eta(t)$  destacada em vermelho.

Lembrando do sistema de equações da dinâmica do circuito de Chua (Eq. 3.20), reescrevemos a equação derivada temporal da tensão do capacitor  $C_1$  com as substituições:  $V_{C_1} = XB_p$ ,  $V_{C_2} = YB_p$ ,  $t = -T \frac{C_1}{m_0}$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{m_0 R}$  e  $i_D(x) = i_d(X)m_0 B_p$ , logo,

$$\frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{RC_1} - \frac{i_D}{C_1} \rightarrow \frac{dX}{dT} = \alpha_1(X - Y) + i_d(X).$$

Agora, além das substituições para  $V_{C_1}$  e  $V_{C_2}$  utilizamos também as substituições  $i_L = \frac{V_L - V_{C_2}}{R_7}$ ,  $V_L = ZB_p$ , e  $\alpha_2 = \frac{C_1}{m_0 C_2 R}$ , e  $\theta = \frac{C_1}{m_0 R_7 C_2}$ . Assim, a derivada temporal da tensão do capacitor  $C_2$  é reescrita por,

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2} \rightarrow \frac{dY}{dT} = \alpha_2(Y - X) - \theta(Z - Y).$$

Para a derivada temporal da corrente do indutor, temos as relações  $\beta = \frac{C_1 r_L}{m_0 L}$ ,  $\gamma = \frac{C_1 R_7}{m_0 L}$  e  $\xi(T) = \frac{\eta(t)}{B_p}$  e a equação é reescrita por,

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{V_{C_2}}{L} - \frac{i_L \cdot r_L}{L} - \frac{\eta(t)}{L} \rightarrow \frac{dZ}{dT} = \gamma(Y + \xi(T)) + \beta(Z - Y) - \alpha_2(X - Y) - \theta(Z - Y).$$

As variáveis do sistema agora são  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Os parâmetros de controle são  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta$ . Os parâmetros fixos são  $\gamma$  e  $\theta$ . As demais grandezas são fixas, sendo a indutância  $L = 4,23 \times 10^{-4} H$ , as admitâncias  $m_0 = -4,09 \times 10^{-4} S$ ,  $m_1 = -7,65 \times 10^{-4} S$ ,  $m_2 = 4,75 \times 10^{-3} S$ . Os valores de tensão de referência  $B_p = 1,8V$  e  $B_s = 5,83B_p$ , as capacitâncias  $C_1 = 23,5\eta F$ ,  $C_2 = 235\eta F$  e

a resistência  $R_7 = 1,0k\Omega$ . A função estocástica é representada por  $\xi(T)$ , com as propriedades de média temporal  $\langle \xi(T) \rangle = 0$  e variância  $\langle \xi(T)\xi(T') \rangle = 2Ah\delta(T - T')$ , sendo  $h$  o passo de integração e  $A$  a intensidade do ruído. Por fim, o sistema de equações a ser integrado numericamente é escrito por,

$$\frac{dX}{dT} = \alpha_1(X - Y) + i_d(X), \quad (4.1)$$

$$\frac{dY}{dT} = \alpha_2(Y - X) - \theta(Z - Y), \quad (4.2)$$

$$\frac{dZ}{dT} = \gamma(Y + \xi(T)) + \beta(Z - Y) - \alpha_2(X - Y) - \theta(Z - Y). \quad (4.3)$$

## 4.2 Resultados numéricos

Nesta seção fazemos um comparativo com o artigo já publicado por Sousa *et. al.* [32], sendo um circuito de Chua, chamado nesta tese de modelo canônico, utilizando resistores digitais construído pelos autores, para o controle dos parâmetros  $R$  e  $r_L$ . As distorções evidentes nas estruturas periódicas são justificadas pelo efeito das distorções na curva não linear. Mostramos aqui, por via de integração numérica que boa parte das modificações das estruturas periódicas se deve ao ruído intrínseco do sistema.

Os resultados presente, neste estudo mostram, com evidências numéricas, o quanto a intensidade do ruído contribuí para as divergências dos resultados experimentais e numéricos para o sistema a tempo contínuo no circuito de Chua com indutor eletrônico. Usando um ruído no circuito de Chua, descrevemos qualitativa e quantitativamente os efeitos intrínsecos de um experimento realístico do circuito de Chua.

Usando o algoritmo Runge-Kutta estocástico de quarta ordem [61, 62], resolvemos numericamente as Eqs. (4.1)-(4.3) com um passo de tempo  $h = 0,1$  e uma integração do tempo com  $1 \times 10^6$ , sendo  $5 \times 10^5$  o transiente descartado. Para cada par de parâmetros  $(R, r_L)$  obtemos o espectro do expoente de Lyapunov usando o conhecido algoritmo de Wolf [70]. O MEL (maior expoente de Lyapunov) é obtido para uma discretização dividida em  $600 \times 600$  parâmetros  $(R, r_L)$ . No espaço de parâmetros os MELs são codificados pelo gradiente de cor. Neste trabalho, referimos à cor branca sendo os pontos fixos com MELs negativos, à cor preta para movimento

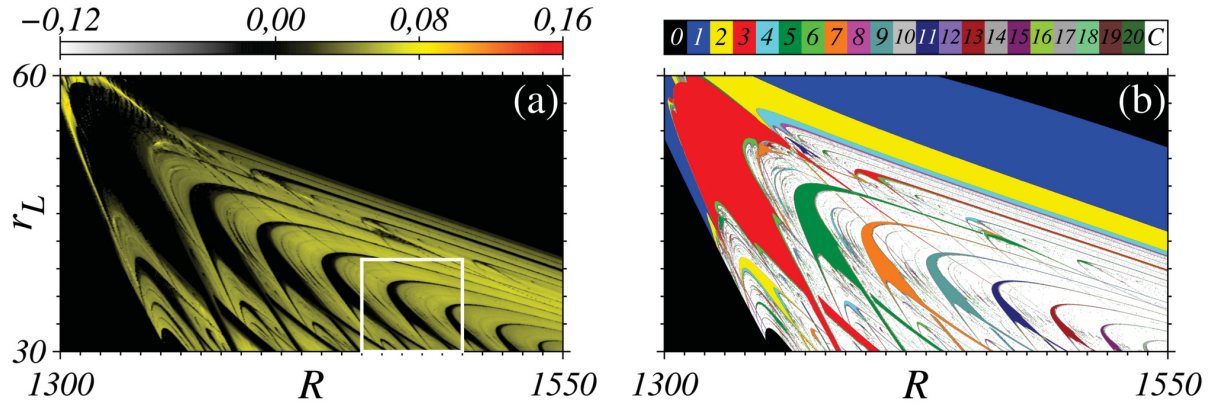


Figura 4.3: Espaço de parâmetros  $(R, r_L)$ , com  $A = 0$  (sem ruído). (a) MEL (veja a barra de cor), discretizados em  $600 \times 600$  valores de parâmetros, com passo de integração  $h = 0, 1$ . A caixa branca refere-se a região magnificada na Fig. 4.5. (b) O número associado de picos no atrator. A barra de cor indica os isopicos. Discretizados em  $1200 \times 1200$  com passo de integração  $h = 0, 01$ .

periódico com o MEL igual a zero, e às cores amarelas e vermelhas os MELs positivos, conforme o aumento dos MELs, sendo esses os que apresentam dinâmica caótica.

Na Fig. 4.3(a) os valores dos MELs (olhando a barra de cores) são plotados aos pares  $(R, r_L)$  para  $A = 0$ . Este é o caso onde não há ruído e exibe um fundo com movimentos periódicos (cor preta) juntamente com um regime de movimento caótico (cor amarela) com algumas ilhas pretas, que são as estruturas periódicas. A Fig. 4.3(b) mostra o espaço de parâmetros para os isopicos, sendo o número de picos na série temporal dentro de um período. As cores indicam os números de máximos em um período da série temporal estável, como discutido na Fig. 2.5(a). Para cada estrutura periódica temos um número distinto dos picos mostrando o alto nível de complexidade com a mudança dos parâmetros. Este é um cenário típico conhecido para tal sistema de tempo contínuo [29, 36]. Embora os resultados da Fig. 4.3 satisfatoriamente descrevam o comportamento não linear do circuito eletrônico, eles certamente não descrevem um experimento real com inclusão do efeito do ruído intrínseco. Propomos agora analisar os efeitos que o ruído causa no espaço de parâmetros. Mostramos na Fig. 4.4 um conjunto de espaços de parâmetros aumentando o valor da intensidade do ruído  $A$ , de  $A = 10^{-9}$  em Fig. 4.4(a) até  $A = 10^{-6}$  em Fig. 4.4(d). Para uma intensidade de ruído muito baixa, o respectivo plano MEL não apresenta mudanças relevantes, como pode ser observado na Fig. 4.4(a) e também na Fig. 4.4(b). Porém à intensidade entre  $A = 10^{-7}$  e  $A = 10^{-6}$  (Fig. 4.4(c) e (d)), evidentes mudanças são observadas. É observado uma significativa redução do domínio periódico embarcado no regime caótico. O efeito de ruído destrói a estrutura periódica iniciando pelas estruturas menores e regiões mais

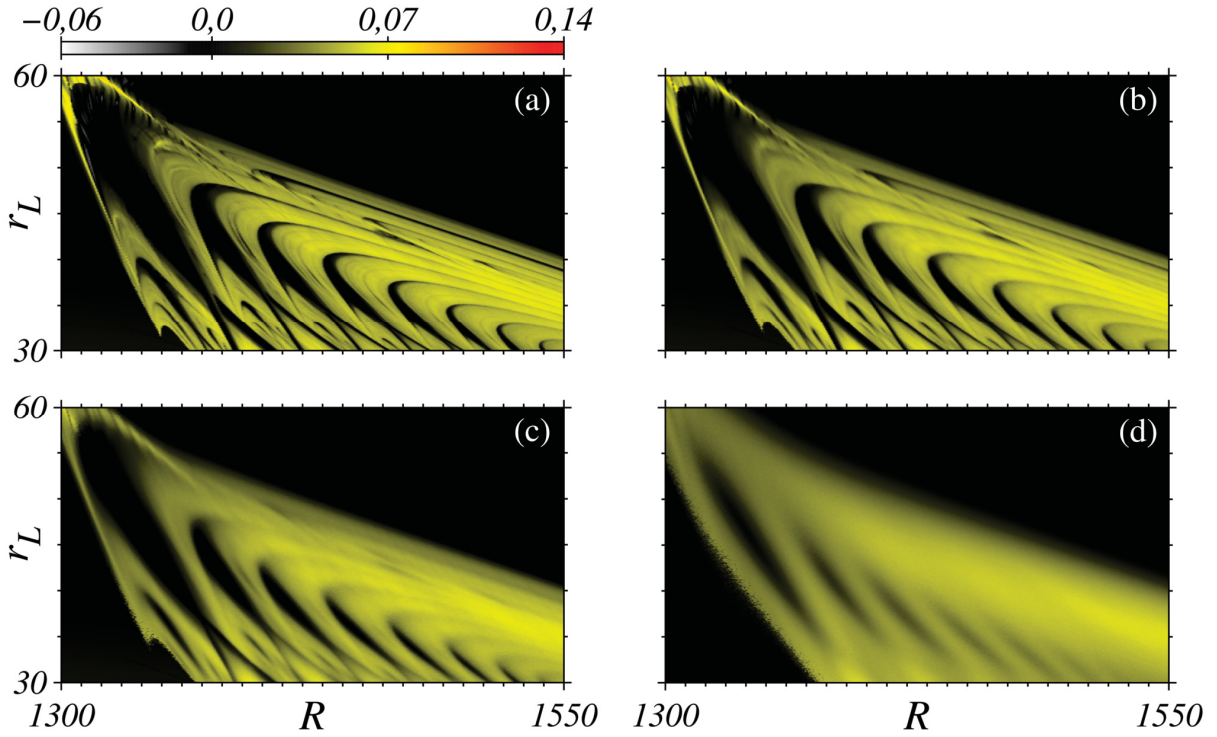


Figura 4.4: Espaços de parâmetros  $(R, r_L)$  mostrando o MEL para (a)  $A = 10^{-9}$ , (b)  $A = 10^{-8}$ , (c)  $A = 10^{-7}$  e (d)  $A = 10^{-6}$ .

finas das estruturas periódicas maiores (antenas). Após isto, com o aumento da intensidade de ruído, a destruição é propagada até o corpo (centro) da estrutura periódica. Por exemplo, comparando Fig. 4.3(a) ( $A = 0$ ) com Fig. 4.4(c) e (d), somente as estruturas periódicas maiores (respectivas as estruturas nas cores em azul, vermelho e verde na Fig. 4.3(b)) sobrevivem a uma grande intensidade do ruído.

Uma pergunta natural sobre os resultados: qual é a intensidade de ruído crítica  $A_{\text{crit}}$  que destrói os respectivos domínios das estruturas periódicas na região do espaço de parâmetro? Na Fig. 4.5(a) mostramos o MEL de uma ampliação da região de Fig. 4.3(a) (veja caixa em branco), e na Fig. 4.5(b) o correspondente da intensidade crítica de ruído. Os valores de ruído  $A_{\text{crit}}$  são codificados pelas barras de cores da figura. Para obter a Fig. 4.5(b), para cada par  $(R, r_L)$  do espaço de parâmetros, integramos as Eqs. (4.1)-(4.3) para um tempo de integração  $7 \times 10^5$ , aumentando o valor de  $A$  com passo de  $10^{-9}$  até que MEL obtenha o valor crítico de  $\lambda_{\text{crit}} = 0,04$ , escolhido por referência ao valor do MEL da borda da estrutura periódica com a caótica sendo um valor de referência local. Para MELs  $\lambda \gtrsim \lambda_{\text{crit}}$  assumimos que o movimento periódico é transformado em movimento caótico. Em outras palavras,  $A_{\text{crit}}$  é o valor necessário para o par de parâmetros do atrator periódico apresentar dinâmica caótica. Tal método foi

recentemente usado em determinar uma intensidade crítica no experimento numérico de ruído para destruir as correntes *ratchet* [18] e gerar movimento caótico no mapa [40]. A proposta principal da Fig. 4.5(b) mostra quanto o domínio periódico resiste a uma intensidade de ruído. Observamos por inspeção visual que os valores de  $A_{\text{crit}}$  são pequenos dentro das antenas e dentro das estruturas periódicas pequenas. Então, eles são mais sensíveis ao efeito de ruído. Por outro lado, aumentando os valores de  $A_{\text{crit}}$ , altera-se a dinâmica dentro do corpo principal (centro) da estrutura periódica. Então, essas grandes estruturas são mais resistentes ao ruído, corroborando as observações presentes em Fig. 4.4. Na Fig. 4.5(b), a região em azul ao vermelho da estrutura periódica, são as que possuem propriedades de maior resistência ao ruído. Quando a intensidade de ruído crítico é aplicada, todo domínio da estrutura periódica é “varrido” transformando-o em regime caótico.

Com o presente resultado numérico nas Figs. 4.4 e 4.5, nossa ideia é o ruído real intrínseco no experimento de circuitos eletrônicos de maior relevância e efetivo processo de destruição e promover instabilidade no movimento periódico. Isto é adequado como resultado prévio para descrever o espaço de parâmetros do circuito de Chua, comparando com o obtido por Sousa [32], mostrado na Fig. 4.6. Por exemplo o presente resultado numérico nas Figs. 4.4(c) e (d), com intensidade de ruído  $A = 10^{-7}$  e  $A = 10^{-6}$ , respectivamente, são adequados com o correspondente experimental mostrado nas Figs. 4.1 e Fig. 4.6 [32]. Em outras palavras, nosso modelo de ruído descreve adequadamente a dinâmica distinta da região do espaço de parâmetros, incluindo o movimento periódico com diferentes períodos e movimento caótico. No estudo experimental, os autores discutem os efeitos no espaço de parâmetros do MEL à influência do experimento perturbado com a curva linear por partes do diodo de Chua do circuito. Calculando sem escala o ruído  $\eta(t) = \xi(T) Bp$  para o valor intermediário entre  $A = 10^{-7}$  e  $A = 10^{-6}$ , obtemos de  $\eta(t) = \sqrt{2hA} Bp$  o valor de  $0,12mV$ . Para valor intermediário entre  $A = 10^{-6}$  e  $A = 10^{-5}$ , obtemos  $0,80mV$ . Esses valores são propriamente os efeitos de ruído do circuito eletrônico, e está de acordo com o ruído experimental estimado obtido de [32], sendo de  $1mV$  a  $2mV$ . Em geral, nosso modelo de ruído gaussiano descreve quantitativamente e qualitativamente o efeito intrínseco do ruído para um experimento realístico para o circuito de Chua.

Nossos resultados numéricos não descartam o processo relevante, que no experimento há efeito devido à assimetria da curva não linear  $i_D$  (função corrente-tensão), mencionada antes em Fig. 3.11(b). Os pontos fixos para o circuito de Chua possuem relação direta com a função  $i_D$ , ou seja, mudanças na função  $i_D$  afetam a dinâmica do circuito. O ruído intrínseco pode



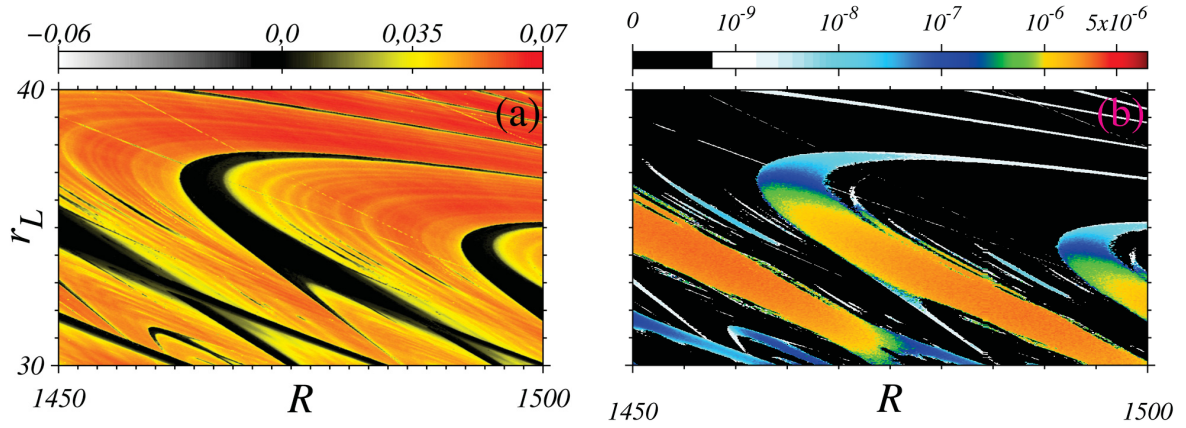


Figura 4.5: Espaço de parâmetros  $(R, r_L)$  numa grade  $600 \times 600$  pontos mostrando (a) o maior expoente de Lyapunov de Fig. 4.3(a) e (b) a intensidade do ruído crítico  $A_{\text{crit}}$ .

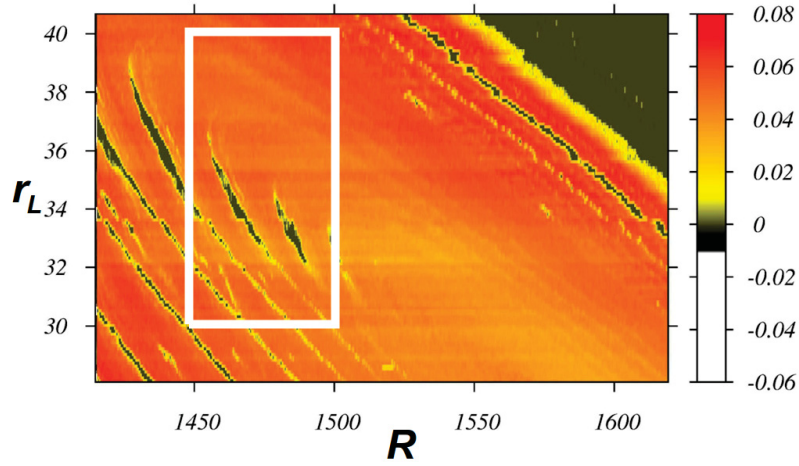


Figura 4.6

MEL obtido pelo cálculo das séries temporais de um circuito de Chua real, ampliação da caixa em vermelho em Fig. 4.1. A caixa branca refere-se a região de interesse para comparação mostrada na Fig. 4.5.

Fonte: *Parameter space of experimental chaotic circuits with high-precision control parameters* [32].

afetar tanto função  $i_D$  quanto o oscilador  $r_L LC_2$ , ou seja, o ruído intrínseco afeta todo o circuito podendo contemplar as distorções assimétricas da função  $i_D$ .

## 5 Chua análogo

Neste capítulo discutimos o caso do Chua análogo. A primeira seção demonstra como obter o novo sistema de equações adimensionais. A segunda seção mostra os materiais e métodos para a realização do experimento eletrônico. A terceira seção apresenta os resultados experimentais. A etapa do projeto experimental foi desenvolvida em colaboração com o prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque da Universidade do Estado de Santa Catarina. A quarta seção mostra os resultados numéricos.

### 5.1 Sistema de equações adimensionalizadas

Voltando ao sistema de equações obtidos pelas leis de Kirchooff,

$$\dot{V}_{C_1} = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{RC_1} - \frac{i_D}{C_1}, \quad \dot{V}_{C_2} = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2}, \quad \dot{i}_L = -\frac{V_{C_2}}{L} - \frac{i_L \cdot r_L}{L},$$

e usando as transformações  $V_{C_1} = xB_p$ ,  $V_{C_2} = yB_p$ ,  $i_D = R\frac{i_d(x)}{B_p}$ ,  $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$  e  $t = \tau RC_1$ , temos

$$\dot{V}_{C_1} = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{RC_1} - \frac{i_D}{C_1}, \quad \rightarrow \dot{x} = \alpha [y - x - i_d(x)].$$

Usando  $i_L = \frac{zB_p}{R}$ , temos

$$\dot{V}_{C_2} = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2}, \rightarrow \dot{y} = x - y + z.$$

Usando também  $\beta = \frac{R^2 C_2}{L}$  e  $\gamma = \frac{Rr_0 C_2}{L}$ , temos

$$\dot{i}_L = -\frac{V_{C_2}}{L} - \frac{i_L \cdot r_L}{L} \rightarrow \dot{z} = -\beta y - \gamma z.$$

Assim, as equações adimensionais a serem integradas são,

$$\dot{x} = \alpha [y - x - i_d(x)], \quad (5.1)$$

$$\dot{y} = x - y + z, \quad (5.2)$$





Componentes	Valores calculados	Valores experimentais	erro %
R1	$10k\Omega$	$9,988k\Omega$	1%
R2	$19,7k\Omega$	$19,014k\Omega$	1%
R3	$11,42k\Omega$	$12,016k\Omega$	1%
R4	$100k\Omega$	$99,084k\Omega$	1%
R5	$545k\Omega$	$530,087k\Omega$	2%
R6	$100k\Omega$	$99,087k\Omega$	1%
R7	$100k\Omega$	$99,087k\Omega$	1%
R8	$10k\Omega$	$9,983k\Omega$	1%
R9	$18,34k\Omega$	$18,084k\Omega$	1%
R10	$11,66k\Omega$	$12,011k\Omega$	1%
R11	$100k\Omega$	$99,089k\Omega$	1%
R12	$10k\Omega$	$9,983k\Omega$	1%
R13	$10k\Omega$	$9,980k\Omega$	1%
R14	$85,72k\Omega$	$84,001k\Omega$	1%
R15	$100k\Omega$	$101,002k\Omega$	1%
C1	$10nF$	$11,8nF$	3%
C2	$10nF$	$8,22nF$	3%
C3	$10nF$	$9,10nF$	2%

Tabela 5.1: Valores dos componentes implementados no experimento do circuito da Fig. 5.1. Os resistores utilizados são de filme metálico com tolerância nos valores de 1%. Os capacitores são de poliéster com tolerância de 10% dos valores fabricados.

Para obter o plano de parâmetros experimental ( $\alpha, \gamma$ ) do circuito na Fig. 5.1, é construída a placa de circuito impresso (PCB), como mostrado na figura 5.2, alimentado por uma fonte de corrente contínua simétrica, e conectada à aquisição de dados (NI PCIe-6259. 1, 2MS/s) em um computador com bloco conectores do tipo BNC. O computador utilizado é equipado com processador Intel Xeon E3-1231, com frequência de 3,40GHz e 16GB de memória RAM.

Os parâmetros  $\alpha, \gamma$  e as variáveis  $(x, y, z)$  são controladas e medidas, respectivamente, pela placa de aquisição de dados, usando uma construção própria em rotinas da linguagem Python.  $(x, y, z)$  são as tensões elétricas nos capacitores ( $C1, C2, C3$ ), respectivamente.

O diagrama Lyapunov obtido discretizando os pares de parâmetros ( $\alpha, \gamma$ ) em uma grade de  $200 \times 200$  valores. Para cada série temporal, após 0,5 s com o relé acionado (reiniciar as condições iniciais) e 1 s de transiente, foram adquiridos 60000 pontos a uma taxa de atualização de 120 kHz. As condições iniciais são os valores de tensões residuais contidos nos capacitores ( $C1, C2, C3$ ), sendo próximos de zero.

Cada parâmetro é controlado independentemente pela placa de aquisição de dados (em duas saídas analógicas). Para cada valor no diagrama de Lyapunov, a série temporal é medida,

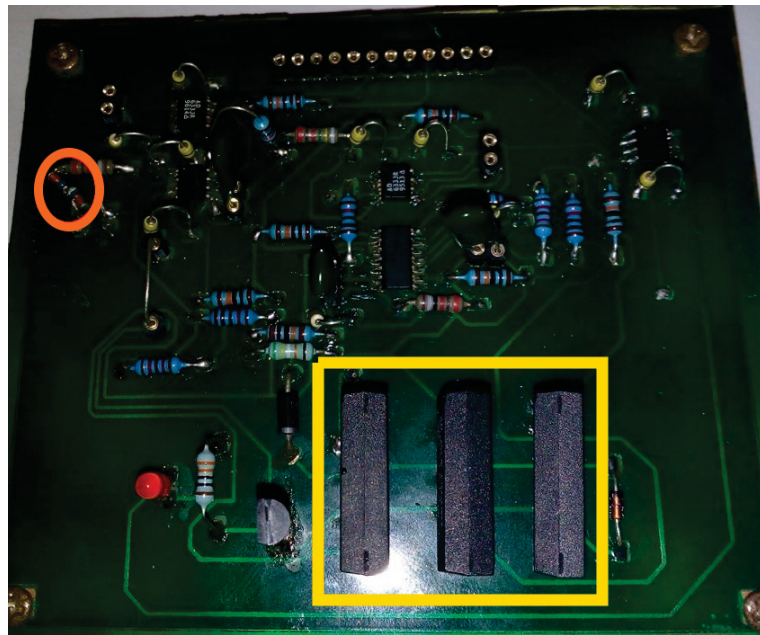


Figura 5.2: Circuito real. Círculo em laranja destaca os diodos zener implementados para obter o comportamento não linear. A caixa amarela destaca a região de relés que reiniciam as condições iniciais. Na parte superior os pinos para conexão de comunicação entre o sistema de aquisição de dados.

também utilizando a placa de aquisição de dados (em duas das suas entradas analógicas) para as variáveis  $(x, y)$ . Por economia de espaço digital (tamanho dos arquivos) salvamos apenas as séries respectivas para  $x$  e  $y$ . Somente para o conjunto de séries temporais foi utilizado 45 gigabytes em dados. O *setup* para aquisição de dados é mostrado na Fig. 5.3.

Após medir o conjunto de séries temporais e usar a rotina de `lyap_spec` do pacote TISEAN [72] com as opções (flags) `-m1, 3 -k23`, calculamos o espectro do Lyapunov para cada série temporal para a posterior montagem do plano de parâmetros. Utilizamos um computador Intel i3-8100, placa mãe Gigabyte Aorus, 8 GB de memória RAM e disco rígido de estado sólido. O tempo de processamento é estimado em 48h, para obter o plano de parâmetros dos 40000 MELs.

O diagrama de bifurcação e o espaço de períodos são obtidos por rotinas desenvolvidas em linguagem Python. Enfatizamos que os valores do parâmetro  $\gamma$  foram reescalados [65],  $\gamma_{experimental} = 10 \gamma_{numerico}$ , para melhor automação e controle das medidas experimentais. Ou seja, o intervalo experimental  $0 \geq \gamma_{exp} \geq -6,0$  corresponde ao intervalo numérico  $0 \geq \gamma_{num} \geq -0,6$ .

### 5.3 Resultados experimentais

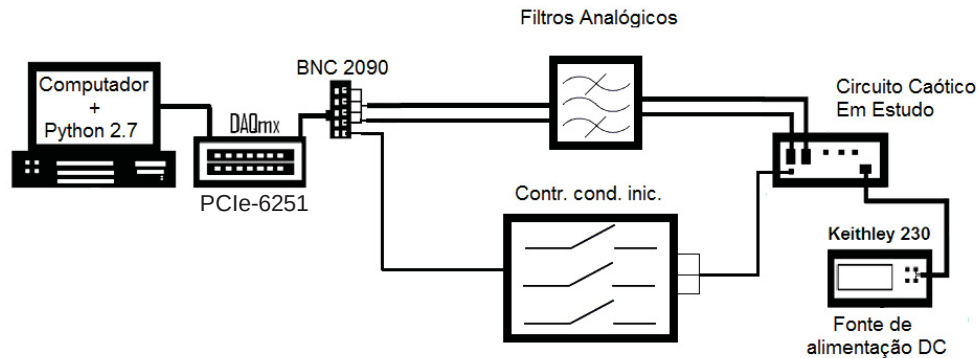


Figura 5.3: *Setup* de aquisição de dados. O circuito caótico é alimentado por uma fonte DC simétrica. São utilizados filtros analógicos para diminuir a influência de ruídos da rede elétrica. O controlador de condições iniciais é um conjunto de relés que são acionados pela placa de aquisição de dados, zerando a tensão elétrica nos capacitores  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . O computador é equipado com Daqmx PCIe-6251. O software de automação para as aquisições é desenvolvido em linguagem Python.

Fonte: adaptado de *Periodicity detection on the parameter space of a forced Chua's circuit* [33].

Neste seção, mostramos os resultados experimentais via plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov (MEL) obtido via TISEAN [72, 73, 74, 75], diagrama de bifurcação e espaço de fases.

A Fig. 5.4 mostra o plano de parâmetros  $(\alpha, \gamma)$ , para o MEL como uma medida invariante na série temporal. As cores em preto estão associadas aos comportamentos periódicos, com MELs sendo nulo, e as cores amarelo para vermelho são para MELs positivos (comportamento caótico). É claramente visível na Fig. 5.4 a presença de estruturas periódicas (regiões pretas) embarcadas no domínio caótico (amarelo para vermelho) com uma boa definição. Este domínio caótico faz fronteira entre duas regiões periódicas, a região preta no lado direito superior e região preta do lado esquerdo inferior, com comportamentos periódicos distintos. Por exemplo, a região preta ao lado direito superior é dominada por atratores de grande amplitude, e a região inferior esquerda está em uma rota para o caos por uma cascata de bifurcação de dobramento de período (não mostrado na figura) iniciando no ponto de equilíbrio do canto inferior esquerdo. Para visualizar a dinâmica mostramos na Fig. 5.5 o diagrama de bifurcação ao longo da linha branca na Fig. 5.4 para os máximos da variável  $x$  da série temporal. As projeções  $x \times y$  dos espaços de fases internos na Fig. 5.5 mostram as dinâmicas correspondentes.

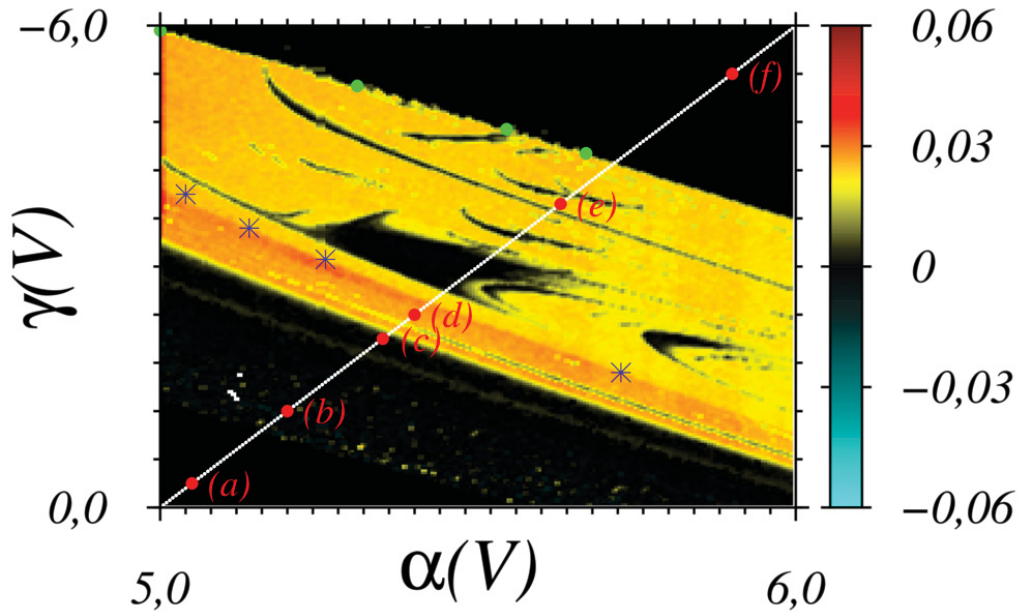


Figura 5.4: Diagrama de Lyapunov experimental obtido por computação analógica do modelo (5.1)-(5.3). O esquema de cores para MELs é apresentado na paleta ao lado direito. Asteriscos em azul são combinações de parâmetros para presença de intermitência. Pontos em verde são combinações de parâmetros para presença de transiente caótico. Os pontos em vermelho ao longo da linha branca são combinações de parâmetros que correspondem à dinâmica do espaço de fase mostrado em Fig. 5.5.

Em relação ao comportamento caótico (regiões amarela e vermelha) na Fig. 5.4, há uma interessante observação experimental, sendo a região que forma uma faixa avermelhada, localizada próxima a região preta inferior. Esta faixa é dominada por atratores caóticos experimentais de único rolo originados pela rota de duplicação do período para o caos, da região preta, onde MEL associado é maior que o MEL dos atratores caóticos de duplo rolo que dominam a região superior amarelada.

Na borda superior da faixa vermelha mencionada, observamos o início da intermitência, comportamento vindo de uma bifurcação de crise [76], quando os dois atratores caóticos de único rolo coexistentes colapsam em um único atrator caótico de duplo rolo. Na Fig. 5.6 este comportamento é mostrado com mais detalhes. Quando o comportamento intermitente está presente, que precede o atrator de duplo rolo estável, a trajetória visita o rolo simétrico em um curto espaço de tempo, como observado nos atratores da Fig. 5.6.

O comportamento de transiente caótico, conforme relatado em outros artigos [28, 47, 77, 78] em experimentos numéricos, também é observado em nosso diagrama experimental do

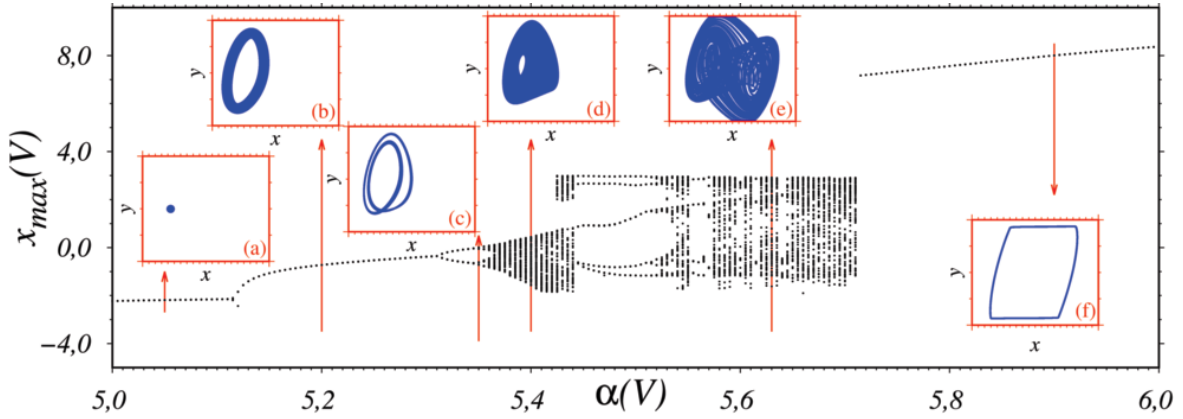


Figura 5.5: Diagrama de bifurcação experimental  $x(V) \times \alpha(V)$  ao longo da linha branca de Fig. 5.4. As caixas em vermelho mostram a dinâmica do espaço de fase  $y(V) \times x(V)$  para os pontos em vermelho ao longo da linha branca em Fig. 5.4. (a)  $\alpha = 5,050$  e  $\gamma = -0,300$ ; (b)  $\alpha = 5,200$  e  $\gamma = -1,200$ ; (c)  $\alpha = 5,350$  e  $\gamma = -2,100$ ; (d)  $\alpha = 5,400$  e  $\gamma = -2,400$ ; (e)  $\alpha = 5,630$  e  $\gamma = -3,780$ ; (f)  $\alpha = 5,900$  e  $\gamma = -5,400$ .

MEL mostrado na Fig. 5.4. Esse comportamento é caracterizado por uma dinâmica caótica para uma janela de tempo curto na série temporal e, para uma evolução de longo prazo, um comportamento estável periódico é alcançado. Na Fig. 5.7 mostramos os atratores experimentais nos pontos destacados em verde na Fig. 5.4. Uma característica do transiente caótico no MEL é uma região de fronteira granulada entre a periodicidade e o caos [28], como na região de fronteira onde os pontos em verde estão localizadas na Fig. 5.4.

Os pontos em ciano estão relacionados a erro de cálculo dos MELs, feito pelo pacote TISEAN. São pontos fixos ou ciclos limites onde o parâmetro  $k = 23$  utilizado no TISEAN não é o mais adequado, resultando numa matriz singular. Este parâmetro está relacionado ao número de falsos vizinhos da série temporal. A escolha do parâmetro  $k = 23$  foi feita realizando teste de vizinhança, calculando o `lyap_spec` com  $k = 1$  até  $k = 100$  para pontos periódicos e caóticos, sendo  $k = 23$  adequado e escolhido por ter seu maior Lyapunov nulo para a dinâmica periódica.

Nos pontos fixos, o ruído é predominante na dinâmica, como mostrado na Fig. 5.8, com distribuição gaussiana e amplitude de pico-a-pico na ordem de  $4\text{ mV}$ . Este resultado corrobora com nossa proposta pois podemos descrever o ruído resultante no experimento por um ruído gaussiano.

A Fig. 5.8 apresenta o histograma da série temporal experimental do ponto fixo, feito da posição de  $x(V)$  no tempo, que mostra claramente um comportamento gaussiano. O desvio padrão experimental  $\sigma = 5,395 \times 10^{-4}\text{V}$  foi obtido usando o pacote TISEAN (`histogram`).



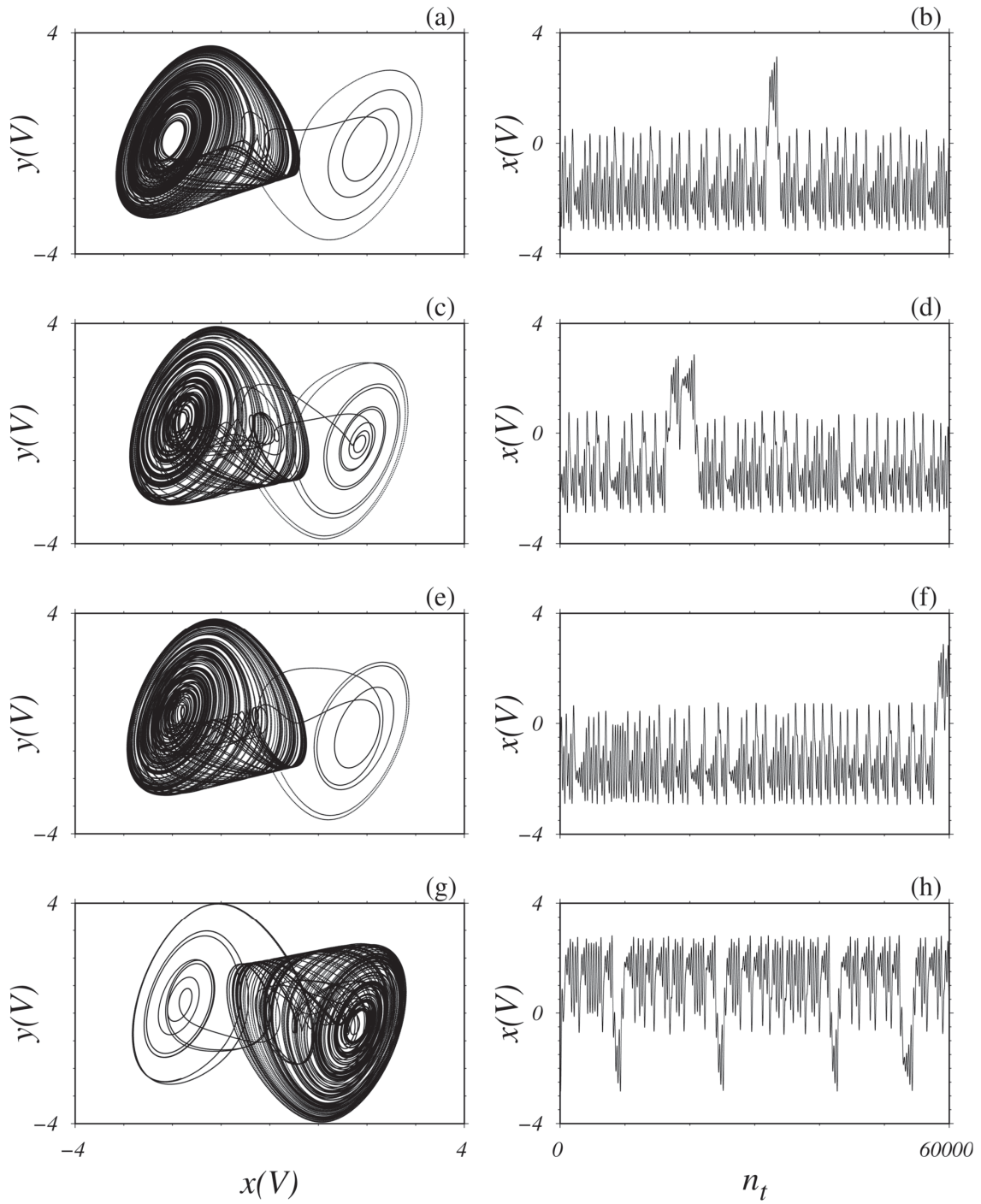


Figura 5.6: O início do comportamento intermitente para alguns atratores do diagrama de Lyapunov destacados com asteriscos em azul na Fig. 5.4 precedendo os atratores de duplo rolo. A esquerda as projeções  $x \times y$  e a direita as respectivas séries temporais. (a) e (b)  $\alpha = 5,725$  e  $\gamma = -1,680$ ; (c) e (d)  $\alpha = 5,140$  e  $\gamma = -3,480$ ; (e) e (f)  $\alpha = 5,260$  e  $\gamma = -3,090$ ; (g) e (h)  $\alpha = 5,040$  e  $\gamma = -3,900$ .

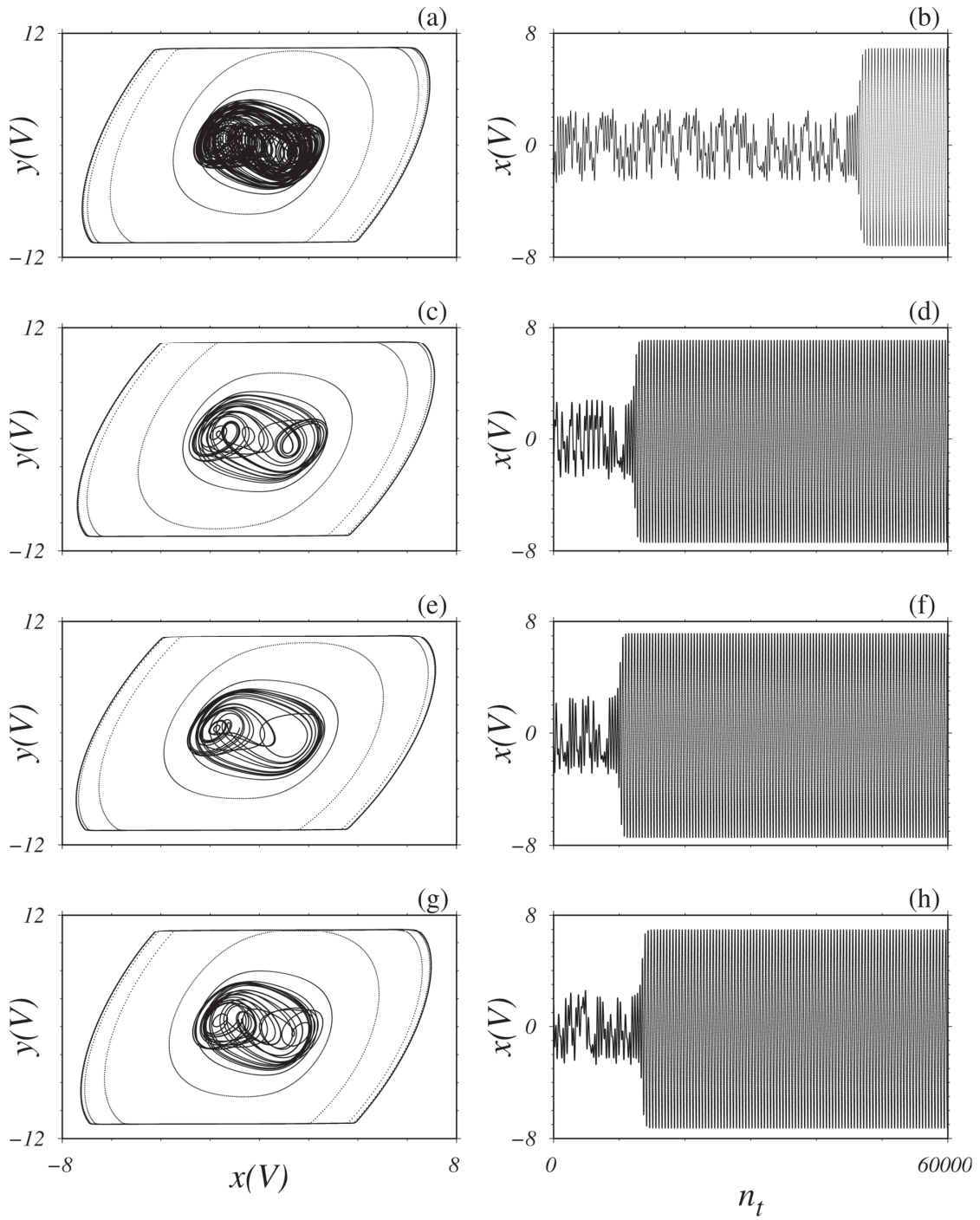


Figura 5.7: Atratores experimentais exemplares localizados nos pontos em verde no diagrama de Lyapunov de Fig. 5.4, mostrando o comportamento caótico transitório. Para uma evolução de longo prazo, os atratores alcançam comportamento estável. A esquerda as projeções  $x \times y$  e a direita as respectivas séries temporais. (a) e (b)  $\alpha = 5,000$  e  $\gamma = -5,940$ ; (c) e (d)  $\alpha = 5,545$  e  $\gamma = -4,740$ ; (e) e (f)  $\alpha = 5,670$  e  $\gamma = -4,410$ ; (g) e (h)  $\alpha = 5,130$  e  $\gamma = -5,670$ .

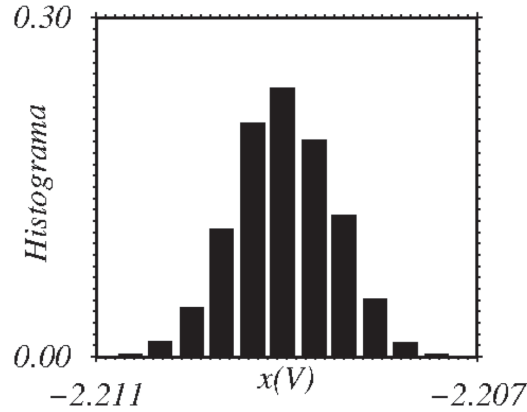


Figura 5.8: Histograma obtido de uma flutuação de um ponto fixo, descrito por uma distribuição gaussiana de valor médio  $-2,209V$  e desvio padrão  $\sigma = 5,395 \times 10^{-4}V$ , calculados pelo pacote TISEAN.

#### 5.4 Resultados numéricos

Para comparar os resultados apresentados anteriormente do experimento analógico com previsões numéricas de uma computação digital, resolvemos Eqs. (5.1)-(5.3) usando o Runge-Kutta de quarta ordem, com dois tipos de função não linear  $i_d$ , a linear por partes

$$i_d(x) = m_0x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x + 1| - |x - 1|), \quad (5.4)$$

com  $m_0 = -0,71$  e  $m_1 = -1,14$ . e a função cúbica

$$i_d(x) = 0,0659x^3 - 1,1671x. \quad (5.5)$$

Com um passo de integração  $h = 10^{-2}$  com tempo de integração  $1,2 \times 10^6$ . Para cada par  $(\alpha, \gamma)$ , usando uma grade discretizada em  $600 \times 600$  parâmetros, o MEL obtido usando o conhecido algoritmo proposto por Wolf [70]. Nas Figs. 5.9 mostramos os planos de parâmetros para os casos, Fig. 5.9(a) nomeado não linear por partes e (b) à função cúbica. A paleta de cores aqui segue Fig. 5.4, mas agora adicionando a cor branca para os casos onde as Eqs. (5.1)-(5.3) divergem. A Fig. 5.9 é o caso isento de ruído.

Por inspeção visual, é claramente observado que a não linearidade cúbica  $i_D$ , Fig. 5.9(b), se ajusta com o experimento via computação analógica mostrado na Fig. 5.4, incluindo a reprodução de algumas estruturas periódicas embarcadas no domínio caótico, e há duas características na região preta, como também discutido para Fig. 5.4. A função cúbica  $i_D$  ajusta para o experimento as características do diodo de Chua, uma vez que no experimento as descontinuidades da função



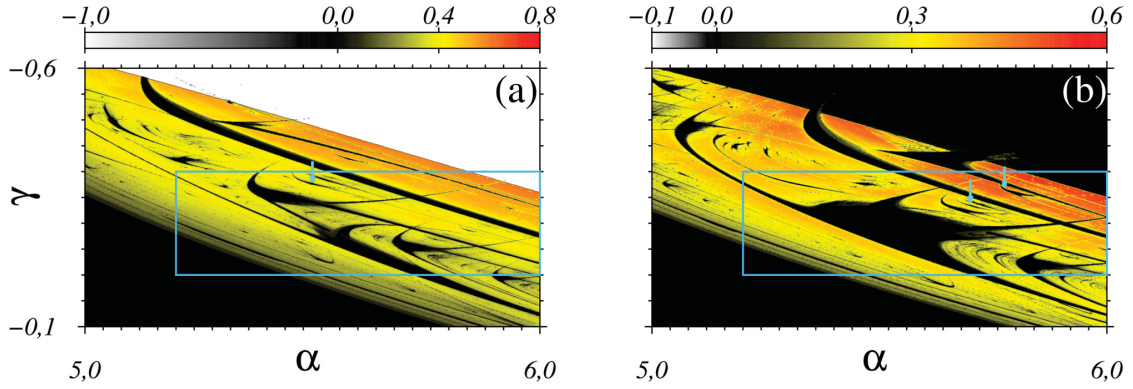


Figura 5.9: MEL para (a) linear por partes, (b) não linearidade cúbica (5.5) no modelo de Eqs. (5.1)-(5.3), sem ruído. A caixa em ciano é referente a magnificação mostrada na Fig. 5.11.

linear por partes tornam-se arredondadas por imprecisões dos dispositivos de circuitos e ruídos intrínsecos, como discutido para o caso anterior (Chua canônico) [79].

A metodologia proposta inclui o ruído no modelo numérico, sendo útil para comparar entre os resultados mostrados em Fig. 5.4. Sendo assim, adicionamos um variável estocástica  $\xi(t)$  em Eq. (5.3), satisfazendo  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  e  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2A h \delta(t - t')$ , com  $h$  sendo o passo do tempo na integração estocástica.  $A$  é o parâmetro que nos permite mudar a intensidade do ruído. Portanto, usamos o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem estocástica. Uma vez que Fig. 5.9(b) (experimento numérico) é livre de ruído em oposição ao Fig. 5.4 (experimento real), observamos a estrutura fina do diagrama de Lyapunov do modelo (5.1)-(5.3), onde são observadas pequenas estruturas periódicas imersas no domínio caótico. Estas pequenas estruturas são corroídas pela intensidade do ruído observados nas Figs. 5.10 (ver setas em ciano). Essas evidências numéricas corroboram as contraparte apresentada na Fig. 5.4, onde as pequenas estruturas periódicas corroídas e distorcidas pelo ruído.

Nas Fig. 5.10(a) e (b), são referentes à intensidade de ruído  $A = 10^{-8}$ , para a  $i_D$  linear por partes e cúbica, respectivamente. Comparando com o caso sem ruído, Figs. 5.9, observamos mudanças sutis, apenas nas bordas das estruturas periódicas, principalmente nas estruturas menores e finas. Nas Fig. 5.10(c) e (d), são referentes à intensidade de ruído  $A = 10^{-7}$ , para a  $i_D$  linear por partes e cúbica, respectivamente. Observamos as estruturas periódicas menores sendo suprimidas. Nas Fig. 5.10(e) e (f), são referentes à intensidade de ruído  $A = 10^{-6}$ , para a  $i_D$  linear por partes e cúbica, respectivamente. Neste caso, não são visíveis os detalhes das bordas das estruturas periódicas (antenas). Nas Fig. 5.10(g) e (h), são referentes à intensidade de ruído  $A = 10^{-5}$ , para a  $i_D$  linear por partes e cúbica, respectivamente. Por fim, apenas o centro das estruturas periódicas maiores não foram afetadas pelo ruído.

Podemos generalizar o efeito do ruído, calculando a intensidade de ruído crítico  $A_{crit}$ , para o qual o comportamento periódico no plano de parâmetros é substituído por um caótico. Na Fig. 5.11 mostramos os planos de parâmetros da intensidade crítica do ruído  $A_{crit}$  para ambos os casos apresentados na Fig. 5.10. Os valores de  $A_{crit}$  é codificado por cores no topo dos diagramas. As menores estruturas periódicas e as antenas das maiores, são afetadas por baixos valores de  $A_{crit}$  tais que, com esses níveis de ruído, as estruturas são corroídas e o comportamento caótico torna-se dominante. As partes internas das maiores estruturas os valores mais altos de  $A_{crit}$ , significando que para essas combinações de parâmetros a dinâmica periódica é mais resistente ao ruído. Nas Figs. 5.11(a) e (b), a cor branca refere-se a ruído zero e as cores tendendo ao vermelho e preto, refere-se a essas regiões com maior resistência ao ruído, sendo visível que as estruturas periódicas são afetadas pelo ruído inicialmente pelas bordas e o centro da estrutura a região de maior resistência. Nas Figs. 5.11(c) e (d), a cor preta refere-se a ruído zero e a cor branca a representa os maiores valores para a intensidade  $A$ . Nesta amostragem, destacam-se estruturas periódicas muito pequenas sendo suprimidas a baixa intensidade de ruído que não são destacadas nas Figs. 5.11(a) e (b).

Por fim, mencionamos que o ruído descrito por uma distribuição gaussiana, usada nesta tese está justificada. A Fig. 5.8 apresenta o histograma experimental do ponto fixo, que mostra claramente um comportamento gaussiano. Enquanto o desvio padrão experimental  $\sigma = 0,54mV$  foi obtido usando o pacote TISEAN, o desvio padrão para a simulação numérica é obtido a partir do ruído não escalado  $\eta(t) = \sqrt{\langle \xi(T)\xi(T') \rangle}$ . Com  $A = 10^{-6}$  e  $A = 10^{-5}$ , obtemos de  $\eta(t) = \sqrt{2Ah}$  os valores das intensidades de ruído  $0,14mV$  e  $0,45mV$ , respectivamente. Isso significa que nosso modelo de ruído imita adequadamente o ruído experimental e é um pouco menor da intensidade do ruído observado no circuito Chua real discutido no Capítulo 4.

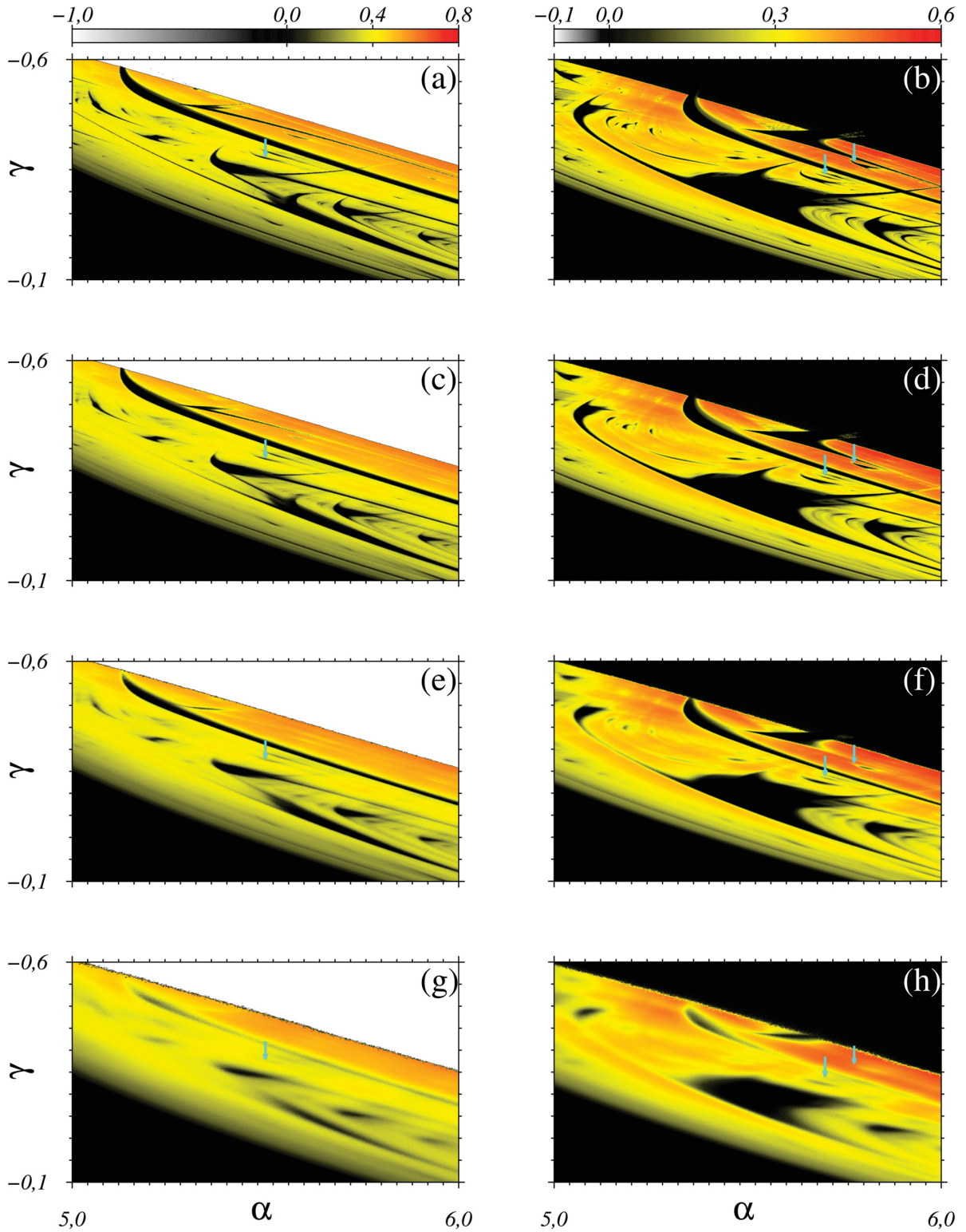


Figura 5.10: Diagramas de Lyapunov para simulações numéricas do modelo (5.1)-(5.3) com  $i_d(x)$  e amplitude de ruído ( $A$ ) diferentes. À esquerda, com a  $i_d(x)$  linear por partes (Eq. 5.4). A região branca é um comportamento onde o modelo diverge. À direita, com a  $i_d(x)$  cúbica (Eq. 5.5). As regiões pretas são regiões periódicas. As regiões amarelas e vermelhas são regiões caóticas. (a) e (b)  $A = 10^{-8}$ . (c) e (d)  $A = 10^{-7}$ . (e) e (f)  $A = 10^{-6}$ . (g) e (h)  $A = 10^{-5}$ . O incremento no valor de  $A$  reduz o tamanho das estruturas periódicas, iniciando pelas estruturas menores e finas (antenas) até o centro das estruturas.

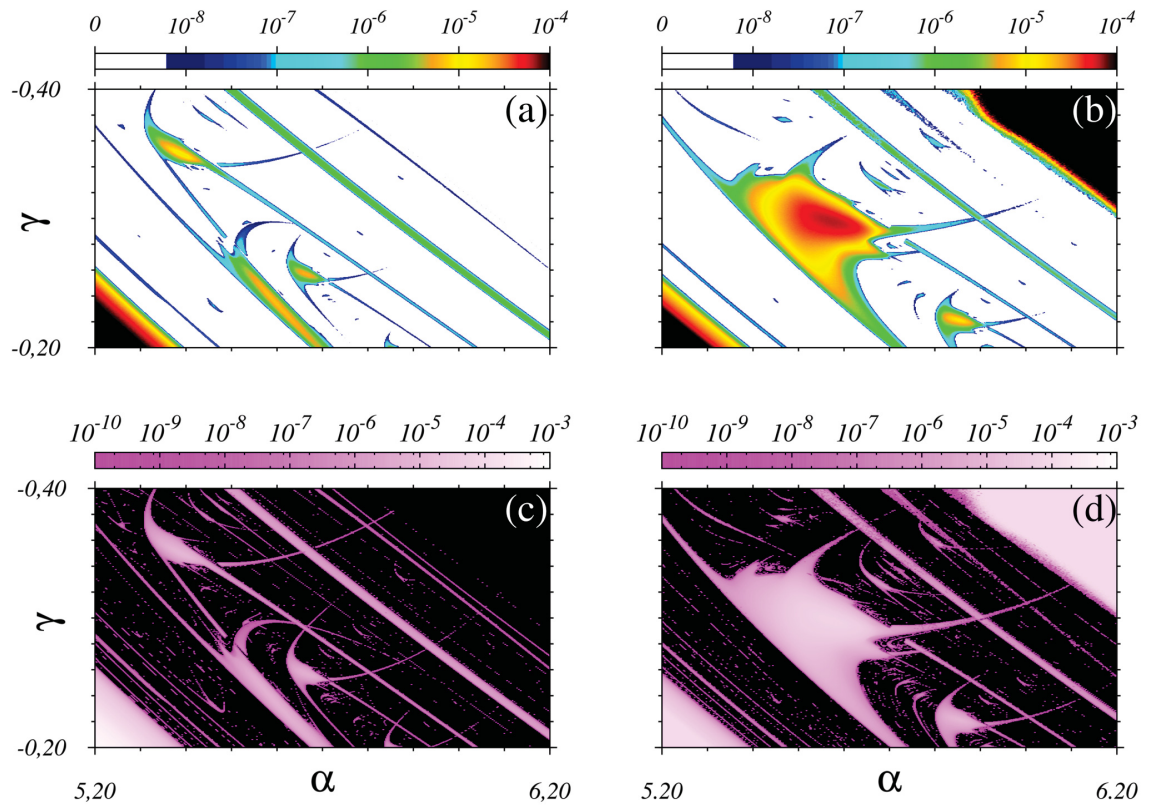


Figura 5.11: Plano de parâmetros da amplitude do ruído crítico  $A_{crit}$  em um modelo (5.1)-(5.3). (a) e (c) Para a função linear por partes, e (b) e (d) função cúbica. (a) e (b) destacam as amplitudes necessárias para corroer as estruturas periódicas. (c) e (d) destacam as estruturas pequenas que são destruídas com baixa intensidade de  $A$  e não aparecem em (a) e (b).

## 6 Considerações finais

O ruído intrínseco existente nos componentes eletrônicos é responsável, fracamente ou fortemente, pelas diferenças entre os resultados numérico e experimental. Circuitos eletrônicos não lineares mostram como uma dinâmica caótica tem maior sensibilidade ao ruído, conhecido por antecipar nos valores de parâmetros as rotas de bifurcações e influenciar a dinâmica intermitente entre dois atratores coexistentes [15, 16].

No presente estudo, incorporamos, de forma simples, o efeito de intensidade de ruído em um modelo de circuito eletrônico não linear, especificamente o circuito de Chua. Descrevemos os efeitos de ruído no plano de parâmetros do modelo, corroborando o resultado experimental publicado, reforçando a influência do ruído nas medidas. Usando um modelo gaussiano descrevemos corretamente qualitativamente e quantitativamente efeitos intrínsecos de um ruído em experimento com circuito Chua. Vale a pena destacar outro resultado notável do nosso estudo, o diagrama de ruído crítico mostrado em Fig. 4.5(b) e Fig. 5.11 para um modelo de sistema contínuo. Usando o maior expoente de Lyapunov (MEL), como referência para caracterizar a dinâmica e aumentando o ruído com pequenas intensidades, mostramos a sensibilidade das estruturas periódicas pela determinação da intensidade de ruído crítico. Isto está em concordância com resultados conhecidos [18, 39, 40] em sistemas dinâmicos em outro contexto.

Uma questão relacionada ao algoritmo utilizado poderá surgir para avaliar o MEL, proposto por Wolf *et al.* em [70], quando há perturbação no modelo: quão robustos são os resultados assintóticos para os expoentes quando ruído é incorporado no modelo? Neste trabalho garantimos a robustez dos resultados analisando o comportamento assintótico dos ELs por tempos transitórios  $10^5$ .

Com a metodologia experimental, usando a técnica de computação analógica [30, 71] mostrado na Fig. 5.1, calculamos o diagrama experimental de Lyapunov de baixo ruído do modelo de Chua [Eqs. (5.1)-(5.3)] em Fig. 5.4, e foi observada experimentalmente uma rica dinâmica e descrita neste diagrama, corroborando as previsões do modelo.

O comportamento intermitente dos atratores de único rolo foi observado em nosso estudo experimental. A configuração em Fig. 5.6, é caracterizado no diagrama de Lyapunov de Fig. 5.4. Neste caso, a trajetória do atrator escapa do rolo e evolui para o outro rolo pela variação dos parâmetros, que precede o surgimento de atratores duplo rolo no fenômeno da bifurcação de crise.



dos parâmetros, que precede o surgimento de atratores duplo rolo no fenômeno da bifurcação de crise.

O transiente caótico é um comportamento dinâmico caracterizado pela existência de um *pré-assintótico* movimento caótico em um transiente da série temporal, e um movimento periódico assintótico após o transiente da série temporal. Em Ref. (78), o autor apresenta algumas características e aplicações deste comportamento transiente em alguns sistemas dinâmicos, da abordagem clássica à quântica. Em nosso presente estudo experimental, o comportamento de transiente caótico foi observado na borda granulada fina no diagrama de Lyapunov Fig. 5.4, e em Fig. 5.7 apresentamos alguns atratores experimentais exemplares deste comportamento. Além disso, com nossos resultados corroboramos, com evidências experimentais, que as bordas granuladas apresentadas em diagramas de Lyapunov de modelos de sistemas dinâmicos não-lineares (28) são uma característica do comportamento de transiente caótico naqueles diagramas.

Em nossos experimentos numéricos no modelo (5.1)-(5.3) usando dois tipos de funções não lineares, Eqs. (5.4) e (5.5), a linear por partes e cúbica, respectivamente, mostramos que a cúbica é a mais adequada no nosso experimento (veja a Figs. 5.4 e Fig. 5.10). A razão para isso é devido às características experimentais da não-linearidade  $i_D$  de Fig. 5.1 (caixa verde). Conforme relatado em outros trabalhos (32) as descontinuidades da curva  $i_D$  linear por partes experimental tornam-se arredondadas e assimétricas de modo que a função cúbica contempla a semelhança da estrutura periódica central de grande área.

Para corroborar que a intensidade do ruído distorceu o diagrama de Lyapunov do experimento real (Fig. 5.4) corroendo as estruturas periódicas de suas fronteiras, como relatado recentemente Ref. (79), adicionamos um ruído gaussiano no modelo (5.1)-(5.3), e calculamos os diagramas de Lyapunov para diferentes intensidades de ruído  $A$ , como apresentado na Fig. 5.10. Além disso, para generalizar os efeitos da intensidade do ruído, simulamos espaços de parâmetros do modelo (5.1)-(5.3) com ruído para a intensidade do ruído crítico  $A_{crit}$ , apresentado na Fig. 5.11. Esses diagramas nos mostram que as menores estruturas periódicas são afetadas por primeiro, por baixos níveis de ruído, até que para níveis elevados de ruído todas as estruturas periódicas são corroídas, permanecendo apenas o comportamento caótico. Estas simulações estão em total concordância com o experimento real mostrado na Fig. 5.4, no qual o nível do ruído experimental foi suficiente para distorcer o diagrama de Lyapunov, destruindo completamente algumas estruturas periódicas menores, e parcialmente corroendo as outras. A proposta e resultados numéricos referente ao circuito de Chua canônico, discutidos nesta tese no Capítulo 4,

estão publicados na *Physics Letters A* com o título *Describing intrinsic noise in Chua's circuit*. A primeira página do artigo encontra-se no Apêndice A. A proposta e resultado referente ao circuito de Chua análogo, discutidos nesta tese no Capítulo 5 está submetido para publicação.

## Referências

- [1] C. D. Motchenbacher and J. A. Connelly, *Low noise electronic system design*. Wiley, 1993.
- [2] R. Mannella and P. V. McClintock, “Noise in nonlinear dynamical systems,” *Contemporary Physics*, vol. 31, no. 3, pp. 179–194, 1990.
- [3] T. Yang, C. W. Wu, and L. O. Chua, “Cryptography based on chaotic systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 5, pp. 469–472, 1997.
- [4] J. Engberg and T. Larsen, *Noise theory of linear and nonlinear circuits*. Wiley, 1995.
- [5] M. Kennedy, G. Setti, and R. Rovatti, *Chaotic electronics in telecommunications*. CRC press, 2000.
- [6] T. Kapitaniak, *Controlling chaos: theoretical and practical methods in non-linear dynamics*. Harcourt Brace, 1996.
- [7] G. Deuschl, C. Schade-Brittinger, P. Krack, J. Volkmann, H. Schäfer, K. Bötzel, C. Daniels, A. Deutschländer, U. Dillmann, W. Eisner, *et al.*, “A randomized trial of deep-brain stimulation for parkinson’s disease,” *New England Journal of Medicine*, vol. 355, no. 9, pp. 896–908, 2006.
- [8] C. J. Wilson, B. I. Beverlin, and T. I. Netoff, “Chaotic desynchronization as the therapeutic mechanism of deep brain stimulation,” *Frontiers in systems neuroscience*, vol. 5, p. 50, 2011.
- [9] D. R. Chialvo, R. F. Gilmour Jr, and J. Jalife, “Low dimensional chaos in cardiac tissue,” *Nature*, vol. 343, no. 6259, p. 653, 1990.
- [10] A. Garfinkel, M. L. Spano, W. L. Ditto, and J. N. Weiss, “Controlling cardiac chaos,” *Science*, vol. 257, no. 5074, pp. 1230–1235, 1992.
- [11] C. Nicolis and G. Nicolis, “Stochastic aspects of climatic transitions—additive fluctuations,” *Tellus*, vol. 33, no. 3, pp. 225–234, 1981.



- [12] V. S. Anishchenko, M. Safonova, and L. Chua, “Stochastic resonance in chua’s circuit,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 2, no. 02, pp. 397–401, 1992.
- [13] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, “Stochastic resonance,” *Reviews of modern physics*, vol. 70, no. 1, p. 223, 1998.
- [14] W. Korneta, I. Gomes, C. R. Mirasso, and R. Toral, “Experimental study of stochastic resonance in a chua’s circuit operating in a chaotic regime,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 219, no. 1, pp. 93 – 100, 2006.
- [15] A. Hamm, T. Tél, and R. Graham, “Noise-induced attractor explosions near tangent bifurcations,” *Physics Letters A*, vol. 185, no. 3, pp. 313–320, 1994.
- [16] J. Gao, S. Hwang, and J. Liu, “When can noise induce chaos?,” *Physical Review Letters*, vol. 82, no. 6, p. 1132, 1999.
- [17] E. R. J. Viana, R. M. Rubinger, H. A. Albuquerque, A. G. de Oliveira, and G. M. Ribeiro, “High-resolution parameter space of an experimental chaotic circuit,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 20, no. 2, p. 023110, 2010.
- [18] C. Manchein, A. Celestino, and M. W. Beims, “Temperature resistant optimal ratchet transport,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 114102, Mar 2013.
- [19] J. B. Johnson, “Thermal agitation of electricity in conductors,” *Physical review*, vol. 32, no. 1, p. 97, 1928.
- [20] H. Nyquist, “Thermal agitation of electric charge in conductors,” *Physical review*, vol. 32, no. 1, p. 110, 1928.
- [21] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018.
- [22] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of the atmospheric sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.

- [24] L. Fortuna, M. Frasca, and M. Xibilia, *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*. World Scientific series on nonlinear science. Series A, World Scientific Pub, 2009.
- [25] L. Torres and L. Aguirre, "Inductorless chua's circuit," *Electronics Letters*, vol. 36, no. 23, pp. 1915–1916, 2000.
- [26] R. Kiliç, *A Practical Guide for Studying Chua's Circuits*. World Scientific Series on Nonlinear Science: Series A, World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2010.
- [27] C. Stegemann, H. A. Albuquerque, and P. C. Rech, "Some two-dimensional parameter spaces of a chua system with cubic nonlinearity," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 20, no. 2, p. 023103, 2010.
- [28] A. Hoff, D. T. da Silva, C. Manchein, and H. A. Albuquerque, "Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional Chua model," *Physics Letters A*, vol. 378, no. 3, pp. 171–177, 2014.
- [29] G. M. Ramírez-Ávila and J. A. Gallas, "How similar is the performance of the cubic and the piecewise-linear circuits of chua?," *Physics Letters A*, vol. 375, no. 2, pp. 143–148, 2010.
- [30] R. Rocha and R. O. Medrano-t, "An inductor-free realization of the Chua's circuit based on electronic analogy," *Nonlinear Dynamics*, vol. 56, no. 4, pp. 389–400, 2009.
- [31] R. Rocha, G. L. Andrucio, and R. O. Medrano-T, "Experimental characterization of nonlinear systems: a real-time evaluation of the analogous Chua's circuit behavior," *Nonlinear Dynamics*, vol. 62, no. 1-2, pp. 237–251, 2010.
- [32] F. F. de Sousa, R. M. Rubinger, J. C. Sartorelli, H. A. Albuquerque, and M. S. Baptista, "Parameter space of experimental chaotic circuits with high-precision control parameters," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 26, no. 8, p. 083107, 2016.
- [33] E. R. Viana, R. M. Rubinger, H. A. Albuquerque, F. O. Dias, A. G. De Oliveira, and G. M. Ribeiro, "Periodicity detection on the parameter-space of a forced chua's circuit," *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 1, pp. 385–392, 2012.
- [34] D. Maranhão, M. Baptista, J. Sartorelli, and I. Caldas, "Experimental observation of a complex periodic window," *Physical Review E*, vol. 77, no. 3, p. 037202, 2008.

- [35] C. Bonatto and J. A. C. Gallas, “Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 054101, Aug 2008.
- [36] H. A. Albuquerque and P. C. Rech, “Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of a Chua circuit,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 40, no. 2, pp. 189–194, 2012.
- [37] R. Vitolo, P. Glendinning, and J. A. C. Gallas, “Global structure of periodicity hubs in lyapunov phase diagrams of dissipative flows,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, p. 016216, Jul 2011.
- [38] J. A. C. Gallas, “Structure of the parameter space of the h  non map,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 2714–2717, May 1993.
- [39] D. R. da Costa, C. P. Dettmann, and E. D. Leonel, “Transport and dynamical properties for a bouncing ball model with regular and stochastic perturbations,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 20, no. 3, pp. 871 – 881, 2015.
- [40] A. C. C. Horstmann, H. A. Albuquerque, and C. Manchein, “The effect of temperature on generic stable periodic structures in the parameter space of dissipative relativistic standard map,” *The European Physical Journal B*, vol. 90, p. 96, May 2017.
- [41] L. O. Chua, “Chua’s circuit: An overview ten years later,” *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, vol. 4, no. 02, pp. 117–159, 1994.
- [42] C. Sparrow, *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Springer, 1982.
- [43] R. N. Madan, *Chua’s Circuit: A Paradigm for Chaos*. World Scientific, 1993.
- [44] A. Pchelintsev, “Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system,” *Numerical analysis and Applications*, vol. 7, no. 2, pp. 159–167, 2014.
- [45] G. Leonov, N. Kuznetsov, N. Korzhemanova, and D. Kuzakin, “Lyapunov dimension formula for the global attractor of the lorenz system,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 41, pp. 84–103, 2016.
- [46] A. Xiong, J. C. Sprott, J. Lyu, and X. Wang, “3D printing—the basins of tristability in the Lorenz system,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 08, p. 1750128, 2017.

- [47] J. Sprott and B. Munmuangsaen, “Comment on “A hidden chaotic attractor in the classical Lorenz system”,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 113, pp. 261–262, 2018.
- [48] R. O. Medrano-T and R. Rocha, “The negative side of chua’s circuit parameter space: Stability analysis, period-adding, basin of attraction metamorphoses, and experimental investigation,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 24, no. 09, 2014.
- [49] T. Singla, P. Parmananda, and M. Rivera, “Stabilizing antiperiodic oscillations in Chua’s circuit using periodic forcing,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 107, pp. 128–134, 2018.
- [50] P. C. Rech, “How to embed shrimps in parameter planes of the Lorenz system,” *Physica Scripta*, vol. 92, no. 4, p. 045201, 2017.
- [51] A. Sack, J. G. Freire, E. Lindberg, T. Pöschel, and J. A. Gallas, “Discontinuous spirals of stable periodic oscillations,” *Scientific reports*, vol. 3, p. 3350, 2013.
- [52] R. Stoop, P. Benner, and Y. Uwate, “Real-world existence and origins of the spiral organization of shrimp-shaped domains,” *Physical Review Letters*, vol. 105, no. 7, p. 074102, 2010.
- [53] C. Cabeza, C. A. Briozzo, R. Garcia, J. G. Freire, A. C. Marti, and J. A. Gallas, “Periodicity hubs and wide spirals in a two-component autonomous electronic circuit,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 52, pp. 59–65, 2013.
- [54] I. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*. Springer, 1998.
- [55] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*. Springer, 1996.
- [56] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [57] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [58] J. C. Sprott, *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. World Scientific, 2010.
- [59] V. Arnol’d, V. Afraimovich, Y. S. Il’jasenko, and L. Shil’nikov, “Dynamical systems, vol. 5, bifurcation theory and catastrophe theory,” 1994.
- [60] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, “Numerical recipes in fortran 77, vol. 1,” *New York, NY: Press Syndicate of the University of Cambridge*, 1992.

- [61] R. L. Honeycutt, “Stochastic runge-kutta algorithms. i. white noise,” *Physical Review A*, vol. 45, no. 2, p. 600, 1992.
- [62] R. L. Honeycutt, “Stochastic runge-kutta algorithms. ii. colored noise,” *Physical Review A*, vol. 45, no. 2, p. 604, 1992.
- [63] G. E. Box, “A note on the generation of random normal deviates,” *Ann. Math. Stat.*, vol. 29, pp. 610–611, 1958.
- [64] J. B. Marion and S. T. Thornton, “Classical mechanics of particles and systems,” *Saunders Colledge Pub.*, quarta edição, 1995.
- [65] C. M. Gilliland, *Handbook of analog computation*. Syston Dronner Corporation, 1967.
- [66] R. Rocha, L. Martins-Filho, and R. F. Machado, “A methodology for the teaching of dynamical systems using analogous electronic circuits,” *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 43, pp. 334–345, 11 2006.
- [67] R. L. Boylestad and L. Nashelsky, *Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos*, vol. 6. Prentice-Hall do Brasil, 1984.
- [68] M. P. Kennedy, “Robust op amp realization of chua’s circuit,” *Frequenz*, vol. 46, no. 3-4, pp. 66–80, 1992.
- [69] H. M. Nussenzveig, *Curso de física básica: eletromagnetismo*. Edgard Blucher, 2001.
- [70] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, “Determining lyapunov exponents from a time series,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 16, no. 3, pp. 285–317, 1985.
- [71] D. Marcondes, G. Comassetto, B. Pedro, J. Vieira, A. Hoff, F. Prebianca, C. Manchein, and H. A. Albuquerque, “Extensive numerical study and circuitry implementation of the Watt governor model,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 11, p. 1750175, 2017.
- [72] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, “Practical implementation of nonlinear time series methods: The Tisean package,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 9, no. 2, pp. 413–435, 1999.

- [73] M. Sano and Y. Sawada, “Measurement of the lyapunov spectrum from a chaotic time series,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 1082–1085, Sep 1985.
- [74] J. C. Sprott and J. C. Sprott, *Chaos and time-series analysis*, vol. 69. Oxford University Press Oxford, 2003.
- [75] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, vol. 7. Cambridge university press, 2004.
- [76] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke, “Critical exponents for crisis-induced intermittency,” *Physical Review A*, vol. 36, no. 11, p. 5365, 1987.
- [77] Y.-C. Lai and T. Tél, *Transient chaos: complex dynamics on finite time scales*, vol. 173. Springer Science & Business Media, 2011.
- [78] T. Tél, “The joy of transient chaos,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 25, no. 9, p. 097619, 2015.
- [79] F. Prebianca, H. A. Albuquerque, and M. W. Beims, “Describing intrinsic noise in Chua’s circuit,” *Physics Letters A*, vol. 382, no. 35, pp. 2420–2423, 2018.

# Apêndice A: Artigo Científico

Physics Letters A 382 (2018) 2420–2423



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

[www.elsevier.com/locate/pla](http://www.elsevier.com/locate/pla)



## Describing intrinsic noise in Chua's circuit

Flavio Prebianca<sup>a</sup>, Holokx A. Albuquerque<sup>b</sup>, Marcus W. Beims<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-980 Curitiba, PR, Brazil

<sup>b</sup> Departamento de Física, Universidade do Estado de Santa Catarina, 89219-710 Joinville, SC, Brazil



### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 20 March 2018

Received in revised form 30 May 2018

Accepted 31 May 2018

Available online 4 June 2018

Communicated by C.R. Doering

#### Keywords:

Chua's circuit

Lyapunov exponent

Gaussian noise

### ABSTRACT

In this Letter we demonstrate that intrinsic inevitable noise effects, existing in realistic experiments with electronic circuits, are properly described theoretically using a Gaussian noise. For this we integrate numerically the equations of motion from the Chua circuit using a fourth-order stochastic Runge–Kutta integrator. Periodic structures in parameter space, related to periodic motion, start to be destroyed when the noise intensity is increased and vanish at a critical intensity value, for which only chaotic motion remains. We find the appropriate noise intensity interval which satisfactorily reproduces the parameter space from the corresponding experiment and it is in remarkable agreement with the estimated experimental noise. Present achievements should be applicable to describe noise effects in a wide number of electronic circuits.

© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

From the experimental point of view, noise can promote a dual result in nonlinear systems. One can lead the system into a desirable behavior, for example in the Stochastic Resonance phenomenon [1] when a low amplitude signal can be amplified by adding white noise. On the other hand, the most common one, noise induces undesirable effect that disturbs the theoretical and/or numerical previsions of a physical phenomenon. In nonlinear systems, noise effects may destroy the periodic motion given rise to the chaotic one [2–4]. In this Letter, the aim is to explore the effect of distinct noise intensities in the numerical experiment carried out in an inductorless version of Chua's circuit model. In the canonical model [5] the circuit is constructed with three-fold piecewise Chua's diode and numerical results display, in the parameter space, characteristic *spiral hubs* [6–8] formed by connected periodic structures named *shrimps* [9]. As reported recently [10], due to features of the electronic devices in real experiments, Chua's diode is a five-fold piecewise linear function. In this paper the authors report experimental measurements in the parameter space of an inductorless Chua's circuit. As a result, the *spiral hub* presented in the three-fold piecewise Chua circuit model [7,8] is destroyed and the *shrimps* embedded in the chaotic domain become distorted, starting from their antennae towards to their central body. The authors claim that this effect is associated

to thermal, electrical and analog to digital conversion noises, and to the distortion of the piecewise linear curves of the real diode and its model. Indeed, this phenomenon is similar to that reported in numerical experiments in discrete [11–13] and continuous [11] times systems under noise, where the noise intensities disturb the parameter space corroding all periodic structures, starting from their borders. For high enough noise intensities, only regimes in the parameter space remain which correspond to chaotic behavior.

Results presented in this Letter enlighten, by numerical evidences, that the noise intensities strongly contribute for the disagreements between experimental and numerical results in continuous-time systems, specifically for the inductorless Chua's circuit. Using a Gaussian noise we correctly describe qualitatively and quantitatively intrinsic effects of noise in the realistic experiment with the electronic Chua circuit. While Sec. 2 presents the model to describe experimental results, Sec. 3 shows our numerical results and concluding remarks are summarized in Sec. 4.

### 2. The model of noise

In real experiments, noise sources may arise from a combination of thermal fluctuations of the electronic devices, their inaccuracies, electromagnetic interference coming from the external environment, among others [14]. To describe the overall noise effect on an electronic circuit, we use in this Letter a Gaussian noise, whose effect is then to be compared to experimental evidences reported before [2,10]. To do so, we use the inductorless Chua's circuit with the same experimental values of the electronic device [15] with a five-fold piecewise linear function for the Chua's diode.

\* Corresponding author.

E-mail address: [mbeims@fisica.ufpr.br](mailto:mbeims@fisica.ufpr.br) (M.W. Beims).

<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.05.054>

0375-9601/© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.